This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644373 4

MAJORATION 20

LEÇONS

STATIQUE GRAPHIQUE.

LEÇONS

DE

STATIQUE GRAPHIQUE,

PAR ANTONIO FAVARO,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE PADOUE;

TRADUITES DE L'ITALIEN,

PAR PAUL TERRIER,

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL GRAPHIQUE

AVEC

APPENDICES ET NOTES DU TRADUCTEUR.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

(Tous droits réservés.)

NEW YORK

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
956191A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1935 L

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Ce Volume contient trois fois autant de matière que le *Calcul graphique* de l'édition italienne. Il se compose de Chapitres et d'Appendices.

Les Chapitres correspondent au texte italien primitif, dont quelques parties ont été augmentées, quelques autres refondues, par l'Auteur lui-même ou avec son concours.

Les Appendices et les Notes finales ont été consacrés, par le Traducteur, tantôt à un plus grand développement des sujets traités dans le corps de l'Ouvrage, tantôt à l'exposé de recherches récentes, disséminées dans un grand nombre de publications périodiques françaises et étrangères. Ces additions portent principalement sur les procédés en usage pour la représentation graphique des phénomènes naturels et des relevés de statistique; sur les applications de la Géométrie anamorphique à la construction et à la transformation des abaques; sur la résolution graphique des équations numériques de tous les degrés; sur la construction des Tables graphiques pour la détermination des aires de profils en travers et des largeurs d'emprises; sur le calcul graphique des mouvements de terres; sur les diverses méthodes d'intégration graphique; sur la construction des courbes paraboliques et hyperboliques de tous ordres; sur quelques applications du système des coordonnées tangentielles et sur un certain nombre de pro-

Blanch 7 Mai 1938 (2 [illegible])

blèmes graphiques dont la connaissance peut être utile aux Ingénieurs.

Dans les parties des Appendices dont la substance a été empruntée à divers auteurs, on ne s'est assujetti ni au respect trop absolu des méthodes très variées, tantôt géométriques, tantôt analytiques, que ces auteurs avaient adoptées, ni à la condition, quelquefois difficile à remplir, de conformer trop systématiquement tous les sujets à un seul et même moule. Mais on a eu soin de rattacher, par une chaîne continue, toute la suite des démonstrations aux propriétés précédemment établies de la *Géométrie de position* et du *Calcul graphique*. On a pu ainsi, tout en abrégeant le discours, créer, pour le fond comme pour la forme, une parenté plus directe entre les Appendices et le texte primitif.

Les occupations professionnelles de M. P. Terrier, et les recherches qu'il a dû faire pour la préparation des Appendices, ne lui ont pas permis, à son grand regret, de mener l'impression aussi rapidement qu'il l'aurait désiré. Par suite, les citations bibliographiques, poussées jusqu'en 1885 dans les dernières feuilles, se trouvent arrêtées, dans les premières, à des dates un peu moins récentes.

Les Notices hors texte n'ont pas été, d'ailleurs, exclusivement consacrées à la bibliographie. Elles contiennent aussi un résumé historique des principales questions.

G.-V.

TABLE DES MATIÈRES.

		Nos	Pages.
	Avertissement de l'Éditeur		v
	Table des matières		vii
	CHAPITRE I. — Les quatre premières opérations	1-34	1
I.	Règle des signes. Conventions	1-2	1
II.	Propositions préliminaires	3	4
III.	Somme et différence de droites	4-11	6
IV.	Réduction d'un rapport à un dénominateur donné	12	12
V.	Opérations sur les rapports	13-14	12
VI.	Multiplication des droites par des rapports	15-22	14
VII.	Polygone de multiplication	23	22
VIII.	Multiplication des rapports	24-26	24
IX.	Produits de segments	27	28
X.	Division	28-32	29
XI.	Calcul des formules rationnelles	33-34	33
	CHAPITRE II. — Élévation aux puissances et extraction des racines	35-57	35
I.	Élévation aux puissances	35-38	35
II.	Extraction des racines. Spirale équiangle	39	42
III.	Propriétés de la spirale	40	45
IV.	Construction de la spirale	41-46	46
V.	Applications	47	52
VI.	Substitution de la spirale aux Tables de logarithmes	48	54
VII.	Courbes logarithmiques	49	56
VIII.	Courbes potentielles	50-53	57
IX.	Courbe pour l'extraction de la racine cubique	54	66
X.	Extraction des racines par la détermination de moyennes proportionnelles	55-57	68
	CHAPITRE III. — Instruments auxiliaires pour les opérations de calcul	58-79	70
I.	Généralités	58	70
II.	Échelles mobiles	59-61	73
III.	Description de la règle logarithmique	62	76
IV.	Théorie et usage de la règle	63-68	81
V.	Modifications apportées à la règle logarithmique	69-71	92

		Nos	Pages.
VI.	Universal proportion Table	72	95
VII.	Fuller's computing telegraph	73	97
VIII.	Arithmographe circulaire	74-75	98
IX.	Spirale slide rule de Fuller	76	100
X.	Abaque de M. Lalanne	76-77	102
XI.	Système Peaucellier	78	111
XII.	Gabarit de Steiner	79	117
	CHAPITRE IV. — Transformation des aires a contour rectiligne.	80-94	119
I.	Principe des signes appliqué aux aires	80-86	119
II.	Représentation des aires par des droites. Réduction d'un triangle à une base donnée	87-89	125
III.	Réduction d'un quadrangle à une base donnée	90	129
IV.	Réduction d'un polygone quelconque à une base donnée	91-94	130
	CHAPITRE V. — Représentations graphiques	95-105	135
I.	Représentation graphique des fonctions à deux variables	95-100	135
II.	Représentation graphique des fonctions à trois variables	101-105	145
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE V	106-129	150
I.	Surfaces topographiques	106-115	150
II.	Applications des surfaces topographiques à la représentation des phénomènes naturels	116-117	154
III.	Diagrammes à colonnes et cartogrammes	118-122	161
IV.	Stéréogrammes	123-126	172
V.	Appareils inscripteurs	127-129	182
	CHAPITRE VI. — Géométrie anamorphique et solutions graphiques	130-142	190
I.	Principes de Géométrie anamorphique	130-136	190
II.	Résolution graphique des équations. Méthode de Lill	137-139	197
III.	Détermination graphique des racines d'une équation. Méthode de Bellavitis	140	204
IV.	Sommation graphique des séries	141-142	205
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE VI	143-175	208
	A. — Applications de Géométrie anamorphique	143-154	208
I.	Abaques pour les problèmes sur l'écoulement des liquides	143-144	208
II.	Déformation suivant un seul axe. Abaque des soupapes de sûreté.	145-147	210
III.	Abaques pour le calcul des poutres	148	212
IV.	Abaques à circonférences pour les fourneaux de mines	149	213
V.	Abaque des piles. Graduations d'axes parallèles	150-151	216
VI.	Abaque des lentilles. Transformation perspective d'une anamorphose	152-153	219
VII.	Application de l'anamorphose à des lois dont l'expression mathématique n'est pas connue	154	223

		Nos	Pages.
	B. — Résolution graphique des équations	155-175	224
VIII.	Résolution de n équations du premier degré à n inconnues par les méthodes de fausse position	155-160	224
IX.	Résolution des équations du second degré. Méthode de Chasles.	161-162	232
X.	Résolution des équations du second degré. Solutions géométriques diverses	163-169	234
XI.	Résolution de l'équation du troisième et du quatrième degré à une inconnue	170	240
XII.	Construction des équations du troisième et du quatrième degré. Méthode de Chasles	171-173	241
XIII.	Résolution des équations numériques de tous les degrés. Méthode de M. Lalanne	174-175	246
	CHAPITRE VII. — TABLES PARABOLIQUES POUR LA DÉTERMINATION DES AIRES DE DÉBLAI ET DE REMBLAI.	176-184	251
I.	Théorie des Tables paraboliques	176-180	251
II.	Construction des Tables paraboliques	181-182	257
III.	Usage des Tables paraboliques	183	260
IV.	Tables simplifiées	184	261
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE VII	185-197	263
I.	Formules générales pour le calcul des emprises et des aires de déblai et de remblai	185-186	263
II.	Tableaux graphiques de M. Rouit	187-190	265
III.	Tableaux graphiques de M. Lalanne	191-194	271
IV.	Profilomètre de M. Siegler	195-197	279
	CHAPITRE VIII. — OPÉRATIONS GRAPHIQUES SUR LES AIRES	198-223	283
I.	Position du problème	198	283
II.	Somme ou différence des aires	199-205	286
III.	Multiplication des aires	206-212	289
IV.	Division des aires	213-223	291
	CHAPITRE IX. — TRANSFORMATION DES FIGURES CURVILIGNES	224-236	300
I.	Transformation d'une aire limitée par des arcs de cercle	224-230	300
II.	Application	231	305
III.	Transformation des aires limitées par des courbes quelconques	232	306
IV.	Quadrature approximative par les formules de Simpson, de Poncelet et de Parmentier	233-236	308
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE IX	237-240	316
	Aire maxima pour un périmètre donné	237-240	316
	CHAPITRE X. — TRANSFORMATION DES SOLIDES	241-248	311
I.	Représentation des volumes par des segments de droites	241	311
II.	Volume des solides réguliers de déblai et de remblai	242-244	314

		Nos	Pages.
III.	Volume des solides irréguliers	245	328
IV.	Détermination des volumes au moyen des courbes de niveau	246-247	330
V.	Détermination des volumes au moyen des plans cotés	248	332
	CHAPITRE XI. — Calcul graphique des mouvements de terre	249-258	334
I.	Préliminaires	249	334
II.	Calcul des aires transversales. Profil transformé	250-251	335
III.	Calcul des volumes. Profil de distribution	252	336
IV.	Détermination des chantiers de transport	253-256	340
V.	Calcul graphique des moments de transport	257	343
VI.	Distances moyennes	258	344
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE XI	259-262	345
I.	Construction directe du profil de distribution	259	345
II.	Emprunts et dépôts en élargissement	260	347
III.	Distinction des divers modes de transport	261-262	349
	CHAPITRE XII. — Planimètre polaire	263-274	353
I.	Théorie du planimètre polaire	263-271	353
II.	Application du planimètre à la mesure des aires	272-275	363
III.	Applications diverses	276-278	366
	APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE XII. — Intégration graphique	279-313	367
I.	Préliminaires et définitions	279-280	367
II.	Ponctuelle intégrale	281	368
III.	Polygone inscrit à la courbe integrale	282	370
IV.	Intégrations successives	283	371
V.	Ponctuelles et lignes dérivées	284	371
VI.	Polygone circonscrit à la courbe intégrale	285	371
VII.	Intégration des lignes droites et brisées	286-290	373
VIII.	Intégration exacte des courbes paraboliques. Ordonnée moyenne. Abscisse moyenne	291-298	375
IX.	Méthodes approchées	299-301	380
X.	Construction des courbes paraboliques	302-303	383
XI.	Construction des courbes $y = xf(x)$ et $y = \frac{f(x)}{x}$, étant donnée la courbe $y = f(x)$	304-306	386
XII.	Construction des courbes hyperboliques	307	387
XIII.	Intégration graphique par anamorphose	308-313	388
	NOTES ADDITIONNELLES DU TRADUCTEUR	314-341	394
Note I.	Coordonnées tangentielles	314-326	394
Note II.	Résolution des équations numériques. Méthode de M. d'Ocagne.	327-336	401
Note III.	Rectification graphique des lignes de bornage	337-341	407

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS

DE

STATIQUE GRAPHIQUE.

CALCUL GRAPHIQUE [1].

CHAPITRE PREMIER.

LES QUATRE PREMIÈRES OPÉRATIONS.

Cousinery, *Le Calcul par le trait*, etc.; Paris, 1840, p. 9-24. — Eggers, *Grundzüge, einer graphischen Arithmetik;* Schaffhausen, 1865, p. 8-16. — Culmann, *Die graphische Statik;* Zürich, 1866, p. 3-12. — Jäger, *Das graphische Rechnen;* Speyer, 1867, p. 5-18. — Schlesinger, *Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik;* Wien, 1868-69, §§ 4-33. — Reuleaux, *Der Constructeur;* Braunschweig, 1869, §§ 22-25. — Von Ott, *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik;* Prag, 1879, Vierte Auflage, §§ 1-7. — Favaro, *Sulle prime operazioni del Calcolo grafico;* Venezia, 1872, p. 5-28. — Bellavitis, *Considerazioni sulla Matematica pura;* Venezia, 1872, Nota 29. — Levy, *La Statique graphique*, etc.; Paris, 1874, §§ 3-14. — Cremona, *Elementi di Calcolo grafico;* Torino, 1874, §§ I-III. — Culmann, *Die graphische Statik;* Zürich, 1875, §§ 1-2. — Jeep, *Die Baumechanik;* Leipzig, 1876, 2. Heft, I. Th., p. 4-13.

I. — Règle des signes. Conventions.

1. La ligne droite s'étend indéfiniment dans les deux directions opposées suivant lesquelles un mobile peut la parcourir.

---

[1] Les citations qui se rapportent aux numéros de la *Géométrie de position* sont distinguées par un G placé en avant du numéro cité.

C'est à ce point de vue général qu'on la considère, en Géométrie, quand on s'occupe des relations purement descriptives des figures (G. 1, 34), sans avoir égard aux rapports de grandeur.

Mais l'étude des propriétés métriques conduit à considérer des portions finies de lignes droites, qu'il n'est possible de distinguer, sur les droites indéfinies qui les contiennent, qu'à la condition de leur assigner deux limites. Toute portion de droite ainsi limitée est une grandeur déterminée : constante quand les points qui la terminent restent fixes, variable quand ces points subissent un écartement ou un rapprochement relatif.

Mais, pour qu'une portion de droite soit complètement donnée, il ne suffit pas que sa grandeur absolue et sa position soient déterminées par ses points extrêmes. La droite présente en effet deux directions opposées, qui diffèrent entre elles de 180°; il est donc nécessaire d'indiquer, en conformité d'une convention préalable, les directions effectives des segments de droites sur lesquels on doit opérer.

2. Un segment de droite étant compris entre deux points A et B, on convient de le désigner par AB ou par BA selon qu'il a son origine en A ou en B. On convient, en outre, de considérer comme positifs tous les segments d'une droite qui sont dirigés dans un certain sens, à partir de leurs origines, et comme négatifs [1] tous ceux qui sont dirigés en sens contraire. Dans le calcul, on affecte les premiers du signe + et les seconds du signe —.

Si l'on admet, par exemple, que le segment compris entre A et B est positif quand on le représente par AB, le même segment sera négatif quand on le représentera par BA, en sorte qu'on aura

$$AB + BA = 0,$$
$$AB = -BA,$$
$$BA = -AB.$$

Trois points A, B, C, *situés dans un ordre quelconque sur une droite, donnent toujours lieu à la relation*

$$AB + BC + CA = 0. \tag{1}$$

[1] Voir, dans la première Partie, *Géométrie de position*, la note de la page 37.

Si l'on suppose, en effet, que les deux points A et B restent fixes, l'ordre des trois points dépendra de la position qu'on attribuera au troisième point C. Ce point peut être à l'extérieur du segment AB et à droite, ou à l'extérieur et à gauche, ou sur le segment même. De là trois cas, correspondant aux trois séries (A, B, C), (C, A, B), (A, C, B). On passe d'une série à l'autre par la permutation de deux lettres, et cette permutation n'altère pas l'équation (1).

Il suit de là que le théorème, vérifié pour l'un des trois cas, s'étend aux deux autres.

Prenons les trois points dans l'ordre A, B, C de la première série; les trois segments AB, BC, AC ont même signe et la somme des deux premiers est égale au troisième, c'est-à-dire qu'on a

$$AB + BC = AC.$$

Mais

$$AC = -CA;$$

donc

$$AB + BC + CA = 0.$$

Des points A, B, C, D, ..., F, *situés en nombre quelconque et dans un ordre quelconque sur une droite, donnent toujours lieu à la relation*

$$AB + BC + CD + \ldots + FA = 0.$$

Supposons, en effet, que la proposition soit vraie pour n points A, B, C, ..., E, c'est-à-dire qu'on ait la relation

$$AB + BC + \ldots + DE + EA = 0,$$

et considérons un point de plus F. Les trois points A, E, F fournissent la relation

$$AE + EF + FA = 0.$$

Ajoutons les deux équations membre à membre, en observant que $EA = -AE$; nous aurons

$$AB + BC + \ldots + DE + EF + FA = 0.$$

Donc, si la proposition est vraie pour n points, elle l'est aussi pour $n + 1$, et la démonstration que nous avons donnée pour trois

points peut être successivement étendue à un nombre quelconque de points.

La convention des signes, établie pour les segments, peut être étendue aux angles.

On prend pour origine d'un angle l'un ou l'autre de ses côtés a et b, et l'on convient de désigner l'angle par $\overline{ab}$ ou par $\overline{ba}$ selon qu'il a pour origine a ou b.

Un angle peut être construit à droite ou à gauche de l'un de ses côtés a pris pour origine, c'est-à-dire à droite ou à gauche d'un observateur qui placerait son œil au sommet de l'angle et qui donnerait à son rayon visuel la direction du côté a.

On convient de considérer comme positifs tous les angles qui s'étendent, à partir de leurs origines respectives, de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens de rotation déterminé par le mouvement des aiguilles d'une montre; les angles qui s'étendent dans le sens opposé sont alors considérés comme négatifs [1].

II. — Propositions préliminaires.

3. On indique ordinairement la direction d'un segment de droite en plaçant un petit cercle à l'extrémité prise pour origine (*fig.* 1); mais l'emploi de ce signe n'est pas possible dans le cas d'une droite indéfinie, et l'indication d'origine ne suffit pas pour déterminer la direction quand on considère plusieurs segments d'une même droite. On indique alors les directions par des flèches. Dans le cas de la *fig.* 2, par exemple, les flèches désignent les directions opposées des segments égaux l_1 et l_2.

Fig. 1.

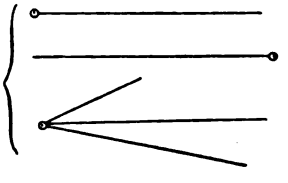
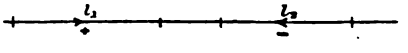


Fig. 2.



[1] Pour plus de développements sur la règle des signes, on pourra consulter, outre les Ouvrages cités dans le sommaire du présent Chapitre, le *Traité de Géométrie supérieure* de CHASLES, Chap. I (2e édition, conforme à la 1re, 1880; Paris, Gauthier-Villars).

Deux segments égaux, parallèles et dirigés dans le même sens sont dits *équipollents* (¹).

(¹) Bellavitis, à qui l'on doit cette expression, a proposé de représenter par le signe ≏ l'ensemble des conditions qu'elle définit. Les premières recherches de Bellavitis sur la méthode des équipollences ont été publiées dans les *Annali delle Scienze del regno Lombardo-Veneto*, t. II, p. 250-253; Padova, 1832. L'auteur y présente la nouvelle méthode comme une sorte de dérivation conduisant des propriétés des points d'une même droite à celles des points d'un même plan. Du théorème très général qui constitue cette dérivation il déduit, comme corollaires, le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle et diverses autres propositions sur le quadrilatère inscrit au cercle, sur le quadrilatère dont deux angles opposés sont complémentaires, sur le point d'où les côtés d'un triangle sont vus sous des angles supérieurs de 60° à ceux du triangle lui-même, sur les quadrilatères harmoniques et sur le centre harmonique d'un nombre quelconque de points par rapport à un point fixe; il généralise les propriétés de l'hexagone déterminé par les involutions positives dans le quadrilatère complet; il établit enfin la relation entre les foyers et les diamètres conjugués de l'ellipse, et quelques propriétés de l'espace.

D'autres applications, relatives aux courbes et aux propriétés du point de concours des hauteurs d'un triangle, figurent dans un second Mémoire, présenté par Bellavitis à l'Athénée de Venise en 1833. Un extrait de ce Mémoire a été publié sous ce titre: *Sopra alcune applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica, estratto di una Memoria presentata all' Ateneo di Venezia da Giusto Bellavitis di Bassano*, dans le *Poligrafo, giornale di Scienze, Lettere ed Arti*, t. XIII, p. 53-61; Verona, 1833.

Dans un troisième Mémoire, *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica, Calcolo delle equipollenze* (*Annali delle Scienze del regno Lombardo-Veneto*, t. V, 1835, p. 244-259), Bellavitis indique les avantages de sa nouvelle méthode, compare les solutions qu'elle fournit immédiatement à celles qu'on obtient par d'autres voies et propose de substituer l'expression d'*équipollences* à celle d'*équations géométriques*.

Dans une quatrième publication, faite en 1837 (*Metodo delle equipollenze*, dans les *Annali delle Scienze del regno Lombardo-Veneto*, t. VII, 1837, p. 243-264), le savant géomètre expose les principes fondamentaux et les règles essentielles de sa méthode.

Un nouveau Mémoire, publié en 1843 (*Soluzioni grafiche di problemi geometrici del primo e del secondo grado, trovate col metodo delle equipollenze*, dans les *Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, t. I, p. 225-267; Venezia, 1843), contient l'application des équipollences à la solution graphique d'un grand nombre de problèmes de Géométrie. Toutes ces solutions reposent sur la construction d'une équipollence trinôme et permettent une application facile du calcul trigonométrique.

L'exposé le plus complet que Bellavitis ait fait de sa méthode a été publié en 1855 (dans les *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, residente in Modena*, t. XXV, IIe Partie, p. 225-309; Modena, 1855), sous le titre de *Sposizione del metodo delle equipollenze, Memoria del Socio attuale Prof. Giusto Bellavitis*. M. C.-A. Laisant a donné une traduction française de ce Mémoire dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII et XIII; Paris, 1873 et 1874; tirage à part chez Gauthier-Villars; Paris, 1874. Le Dr C. Zahradnik en a publié une

III. — Somme et différence de droites.

4. Les opérations les plus simples, parmi celles qu'on peut effectuer graphiquement, sont l'addition et la soustraction.

---

traduction en langue tchèque (*Methoda equipollenci cili rovnic Geometrickijch, sepsal Giusto Bellavitis*, etc. Ciske Vydani Usporodal Dr Karel Zahradnik, *V. Praze tiskem dra Ed. Grégra-Nakladem Jednoty Ceskych Mathematiki*, 1874).

Voir le résumé que Bellavitis a donné de ses nombreux travaux sur les équipollences dans la *Quarta Parte della Duodecima Rivista di giornali* (*Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 5e série, t. I, p. 1147-1303; Venezia, 1874 et 1875). *Voir* aussi la Notice historique du même auteur, *Sulle origini del metodo delle equipollenze* (*Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, t. XIX, p. 449-491; Venezia, 1876), et l'étude de M. J. Hoüel, *Sur le calcul des équipollences, nouvelle méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis*; Paris, Gauthier-Villars, 1869.

Nous avons parlé ailleurs des travaux de Möbius. A côté de ce savant et de Bellavitis, il convient de citer Hermann Grassmann, dont les recherches sur la même question ont une très haute importance. Le premier Ouvrage de Grassmann a pour titre : *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert*. Erster Theil : *Die lineale Ausdehnungslehre enthaltend*; Leipzig, 1844. La Préface de la première Partie contenait le plan de la seconde, qui n'a jamais été publiée séparément. Grassmann, en effet, attribuant le peu de succès de la première aux difficultés que présentait l'étude d'un Traité plus philosophique que mathématique, refondit complètement son travail. Ses recherches antérieures, publiées dans les volumes XXIV, XXV, XXXI, XLII, XLIV, XLVIII, LII du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de A. Crelle (1842-1846) et dans un Mémoire séparé (*Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibnitz erfundene Charakteristik*, gekrönte Preisschrift; Leipzig, 1847), lui fournirent des matériaux pour un nouvel Ouvrage très remarquable, qu'il publia en 1862, avec ce titre : *Die Ausdehnungslehre*. Grassmann a donné plus récemment, dans les *Mathematische Annalen* (VII Bd, 1874; XII Bd, 1877), trois Mémoires parmi lesquels nous signalerons, comme se rapportant plus particulièrement à notre sujet, celui qui a pour titre *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre*. Un dernier Mémoire, non moins intéressant, a été publié, après la mort de Grassmann, dans le *Journal de Crelle* (84 Bd). Ce savant émérite a trouvé un interprète digne de lui en la personne du professeur Victor Schlegel, dont les Ouvrages ont puissamment aidé à la vulgarisation de la nouvelle doctrine (*Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe*; sans date. — *System der Raumlehre nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt*. Erster Theil : *Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden, der Ebene*; Leipzig, 1872. Zweiter Theil : *Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra*; Leipzig, 1875). Schlegel a publié, en outre, un grand nombre de Notes et de Mémoires sur le même sujet dans le *Zeitschrift für math. u. natur. Unterricht* (II Jahrg., 1871, et X Jahrg., 1879), dans les *Mathematische Annalen* (VI Bd., 1873), dans le *Zeitschrift für Mathematik u. Physik* (XXI Jahrg., 1876; XXIII Jahrg., 1878; XXIV Jahrg., 1879).

Après Hermann Grassmann lui-même et Schlegel, on doit citer, pour leurs travaux

Ces opérations portent en général sur des lignes droites. Aussi devra-t-on, quand il s'agira d'aires, de volumes, de forces ou d'autres grandeurs quelconques, représenter ces grandeurs par des lignes droites ou les réduire préalablement à des lignes droites.

Le calcul graphique enseigne les moyens d'opérer ces réductions, en sorte que les règles relatives à l'addition et à la soustraction des droites peuvent être généralisées et appliquées à toutes les quantités susceptibles d'être représentées par des droites [1].

---

sur l'*Ausdehnungslehre :* Möbius (*Die Grassmann'sche Lehre von Punktgrössen und den davon abhängenden Grössenformen dargestellt;* Leipzig, 1847); Hankel (*Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen ; Theorie der complexen Zahlensysteme ;* Leipzig, 1867, p. 16-17 et 140), et Robert Grassmann, frère d'Hermann (*Die Formenlehre der Mathematik;* Stettin, 1872).

Grassmann a appliqué l'*Ausdehnungslehre,* non seulement aux Mathématiques proprement dites, mais aussi à l'Électrodynamique et à la théorie de Newton sur le mélange des couleurs. M. Preyer l'a appliquée récemment à la théorie des sensations (*Elemente der reinen Empfindungslehre;* Leipzig, 1877).

La théorie de l'*Ausdehnungslehre* (en français, *théorie des quantités extensives*) ne peut pas être clairement exposée en peu de mots, et nous doutons même qu'on en puisse acquérir une notion complète par le résumé qu'en a donné Grassmann dans l'*Archiv der Mathematik und Physik* de Grunert (Sechster Theil. Greifswald, 1845, p. 337-350). On peut s'en faire une idée générale par les *Clefs algébriques* de Cauchy, avec lesquelles la méthode de Grassmann a beaucoup d'analogie (Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XXXVI, p. 70-75, 129-136, 161-169; t. XXXVII, p. 38-45, 57-64, 109. *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* t. IV; Paris, 1847, p. 356-401). Cette analogie a du reste donné lieu, de la part de Grassmann, à une contestation de priorité (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XXXVIII, p. 744).

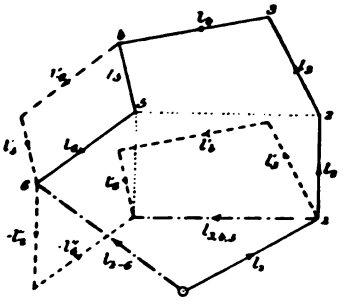
Une seconde édition de l'*Ausdehnungslehre* a été publiée tout récemment sous ce titre : *Die Ausdehnungslehre von* 1844 *oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.* Leipzig, Verlag von Otto Wigand, 1878.

Voir, pour plus de détails, *Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann,* per Antonio Favaro, etc., dans le *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche,* pubblicato da B. Boncompagni, t. XI; Roma, 1878.

[1] Dans son Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique (*Annales des Ponts et Chaussées,* 2e série, 1846), M. Lalanne a mentionné l'Ouvrage publié par Poucet à la fin du siècle dernier. Cet Ouvrage, dont nous avons donné le titre et l'analyse dans notre Préface, traite des poids, des mesures et de leur conversion, et contient sous forme d'appendice une *Arithmétique linéaire,* qui enseigne « l'usage de la figure pour les quatre règles élémentaires, pour l'élévation au carré et pour l'extraction de la racine ».

5. Considérons un nombre quelconque de segments $l_1, l_2, l_3, \ldots$ (*fig.* 3) donnés en grandeur et en direction et distribués d'une manière quelconque dans un plan. Construisons, à partir d'un point quelconque, un contour polygonal composé de segments respectivement équipollents aux segments donnés, et disposés de telle façon que l'origine de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité du précédent. Nous appellerons *somme géométrique* [1] ou *résultante* des segments proposés le segment qui a pour origine et pour extrémité l'origine et l'extrémité de ce contour polygonal.

Fig. 3.



La figure qui détermine la somme géométrique de tous les segments proposés donne aussi la somme partielle d'un nombre quelconque de ces segments, pourvu qu'ils soient consécutifs. Cette somme est représentée par la droite qui va de l'origine à l'extrémité du contour partiel correspondant aux segments considérés. Par exemple, la droite 2-5 représente la somme des segments l_3, l_4 et l_5.

6. Si les segments à additionner sont tous parallèles, on porte,

---

[1] Dans une de nos précédentes publications (*la Statica grafica nell insegnamento tecnico superiore*), nous avons cité comme remontant à 1828 un Mémoire de WARREN qui traite de la *somme géométrique des droites*. BELLAVITIS (*Atti del Reale Istituto Veneto*, t. III, s. IV, p. 246) a contesté la date de 1828 et affirmé que la publication de WARREN est « postérieure à la découverte de la méthode des équipollences ». Nous regrettons d'avoir à confirmer l'exactitude de notre première assertion. Le Mémoire dont nous nous sommes autorisé a pour titre *A Treatise of the geometrical representation of the square roots of negative quantities*, by the Rev. JOHN WARREN, fellow and tutor of Jesus College; Cambridge, 1828, in-8° de 154 pages. La définition de la *somme géométrique* et la figure qui s'y rapporte se trouvent au n° 3 du Chap. I. Nous avions vu cet Ouvrage, il y a quelques années, dans une bibliothèque étrangère. Nous devons à l'obligeance de M. DE SAINT-VENANT, membre de l'Institut de France, la communication plus récente qui nous a permis de vérifier le passage précité. Le Mémoire de WARREN est d'ailleurs cité par CHASLES avec la date de 1828 (*Rapport sur les progrès de la Géométrie*; Paris, 1870, p. 62). Nous nous étions trompé, à la vérité, en donnant ce Mémoire, imprimé à Cambridge, comme extrait du *Cambridge Journal*; mais ceci n'altère en rien l' exactitude de notre assertion.

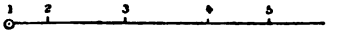
comme dans le cas précédent, les segments équipollents bout à bout à partir d'un point quelconque et en ayant égard aux signes. Ces nouveaux segments appartiennent évidemment à une même droite, et la portion de cette droite comprise entre l'origine du premier d'entre eux et l'extrémité du dernier représente la somme géométrique cherchée. Cette somme ou résultante des segments proposés n'est autre, en pareil cas, que leur somme algébrique.

Nous devons dire ici quelques mots des notations au moyen desquelles on indique sur une droite les limites et le sens des segments à additionner.

On peut considérer une droite, soit comme une forme de points ou ponctuelle, soit comme le lieu d'une suite de segments.

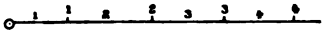
Dans le premier cas (*fig.* 4), l'indication conventionnelle ne présente aucune ambiguïté si chacun des points à considérer est affecté d'un indice d'ordre; mais, dans le second cas, il devient nécessaire d'indiquer avec précision les points de séparation des segments consécutifs.

Fig. 4.



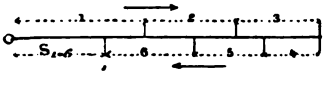
Si tous les segments sont de même sens, on pourra placer simplement au-dessus de chacun d'eux le numéro d'ordre qui le distingue (*fig.* 5).

Fig. 5.



Si l'on a à considérer une série continue de segments dirigés dans un même sens, immédiatement suivie d'une autre série de segments dirigés en sens contraire, c'est-à-dire si le changement de direction n'a lieu qu'une seule fois, on aura recours au même moyen, en ayant soin, toutefois, de placer les indices d'ordre au-dessus ou au-dessous de la droite, selon qu'ils se rapporteront à des segments de l'une ou de l'autre série. Tel est le cas de la *fig.* 6, dans laquelle, le changement de sens étant au point séparatif des segments 3 et 4, la somme des six segments est indiquée par S_{1-6}.

Fig. 6.

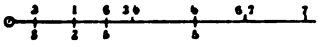


Enfin, si les segments de directions opposées, au lieu d'être en deux séries continues, se présentent dans un ordre de succession quelconque, il sera nécessaire d'affecter du même indice les deux

extrémités de chaque segment, en ayant toujours soin d'ailleurs de placer les indices de part ou d'autre de la droite, selon qu'ils se rapportent à des segments de l'une ou de l'autre direction (*fig.* 7).

7. Un contour polygonal fermé, plan ou gauche, se projette sur un plan quelconque suivant un autre contour fermé; en d'autres termes, la somme de ses projections est nulle comme la somme de ses côtés.

Fig. 7.



On voit immédiatement que, si le contour polygonal proposé n'est pas fermé, la résultante de ses côtés se projette sur le plan suivant la résultante de leurs projections.

Cela posé, pour effectuer graphiquement l'addition des segments qui ont des directions quelconques dans l'espace, on devra se donner les projections de ces segments sur deux plans coordonnés. Les résultantes de ces projections seront les projections de la somme géométrique des segments proposés. On pourra donc déterminer graphiquement cette somme.

8. *La somme d'un nombre quelconque de segments est indépendante de l'ordre dans lequel on les additionne.*

Nous voyons d'abord que cette somme ne change pas quand on substitue l'un à l'autre deux segments consécutifs quelconques, par exemple l_5 et l_6 (*fig.* 3); car les nouveaux segments, l'_4 et l'_6, équipollents aux premiers, forment avec ceux-ci un parallélogramme et aboutissent par conséquent au même point 6. On pourra d'ailleurs opérer successivement la substitution entre l_2 et l_3, puis entre l_2 et l_4, puis entre l_2 et l_5; on aura ainsi finalement remplacé l'un par l'autre deux segments non consécutifs quelconques, l_2 et l_5, sans que la somme des segments proposés ait subi aucune altération.

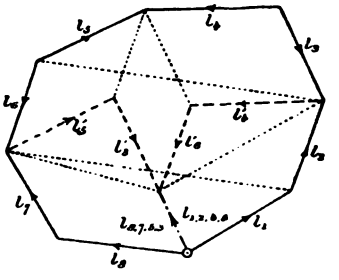
9. Si la ligne polygonale se ferme exactement et si les flèches de tous les segments qui la composent sont dirigées dans le même sens du contour, la somme ou résultante de ces segments est nulle.

Si les segments qui forment un contour polygonal fermé sont

dirigés, les uns dans un sens, les autres dans le sens opposé, la somme des premiers est égale à celle des seconds.

Pour établir ce résultat graphiquement, on construit, à partir de l'origine du contour total proposé, deux contours distincts, respectivement formés de segments équipollents aux segments de l'un des systèmes et à ceux du système opposé. Ces deux nouveaux contours aboutissent à une extrémité commune, et les sommes géométriques partielles des segments qui les composent sont représentées par un seul et même segment. Tel est, par exemple, le cas du contour 1-2-3-4-5-6-7-8 (*fig.* 8), dans lequel les segments l_1, l_2, l_4 et l_6 ont même somme que les segments l_3, l_5, l_7 et l_8.

Fig. 8.



10. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Dès lors, si d'un segment ou de la somme de plusieurs segments on veut soustraire d'autres segments, il suffira de renverser les flèches de ceux-ci et de les additionner ensuite avec les premiers. On retranchera, par exemple (*fig.* 3), les segments l_2 et l_6 de la somme $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$ en formant la somme

$$(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6) + (-l''_2) + (-l''_6),$$

dans laquelle $l''_2 = l_2$, $l''_6 = l_6$.

L'ordre de composition étant sans influence sur le résultat (8), cette somme est identique à la suivante,

$$l_1 + l_2 + (-l''_2) + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + (-l''_6);$$

mais les sommes partielles $+l_2 + (-l''_2)$ et $+l_6 + (-l''_6)$ sont nulles. Le résultat de la soustraction est donc représenté par la somme géométrique des segments l_1, l_3, l_4 et l_5.

11. Tout ce que nous avons exposé relativement à l'addition et à la soustraction des segments qui ont même position et même direction s'applique aux opérations analogues effectuées, sur un arc

circulaire, entre des portions d'arcs circulaires de même rayon. La même application peut, par conséquent, être faite aux angles dans le plan.

Mais ce qui a été dit de l'addition dans l'espace ou dans le plan n'est applicable ni à l'addition des grands cercles sur la sphère, ni par conséquent aux rotations dans l'espace.

En effet, la sphère ne contenant pas de grands cercles parallèles, on ne peut pas effectuer sur elle les déplacements parallèles au moyen desquels les additions de lignes sont exécutées.

IV. — Réduction d'un rapport à un dénominateur donné.

12. Avant de passer de l'addition et de la soustraction des droites aux opérations de même nature sur les rapports, il est nécessaire de voir comment un rapport $\frac{a}{b}$ peut être réduit à un dénominateur quelconque N.

Appelons y le numérateur inconnu qui correspond au dénominateur N. Nous aurons la relation

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{N},$$

dans laquelle y, quatrième proportionnelle entre a, b, N, peut être construit de diverses manières au moyen de triangles semblables.

On peut ainsi réduire à un dénominateur déterminé N un nombre quelconque de rapports donnés

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{b_n},$$

quels que soient d'ailleurs les signes de ces rapports.

On peut aussi transformer les rapports donnés en de nouveaux rapports ayant le même numérateur.

V. — Opérations sur les rapports.

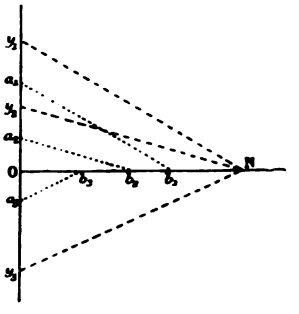
13. Il est maintenant facile de former la somme algébrique de plusieurs rapports donnés, tels que $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$.

Supposons ces rapports réduits à un dénominateur commun quelconque N, et soient y_1, y_2, y_3 les numérateurs inconnus correspondants ; on a

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{N}.$$

On prend un système d'axes orthogonaux (*fig.* 9) ; on porte, à partir de l'origine O, les numérateurs positifs a_1 et a_2 dans la direction supérieure de l'axe des y, et le numérateur négatif a_3 dans la direction inférieure du même axe. On porte sur l'axe des x, à partir de la même origine, les dénominateurs b_1, b_2, b_3 et le dénominateur commun N. On joint les extrémités de a_1, a_2, a_3, respectivement, aux extrémités de b_1, b_2, b_3, et de l'extrémité de N on mène des parallèles aux droites de jonction. Ces parallèles déterminent sur l'axe des y les extrémités des numérateurs cherchés, y_1, y_2, y_3, qui ont leur origine commune au point O et qui correspondent au dénominateur commun N.

Fig. 9.



On obtient ensuite très facilement la somme $z = y_1 + y_2 - y_3$ des nouveaux numérateurs.

Le résultat de la construction sera exprimé en fractions décimales, si l'on a eu soin de prendre comme dénominateur commun, en se réglant sur l'échelle du dessin, une fraction égale au dixième ou au centième de l'unité linéaire.

14. Les considérations qui précèdent se prêtent à une solution très simple du problème suivant :

Étant donné un nombre quelconque de droites

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

en construire d'autres en pareil nombre,

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n,$$

qui soient directement ou inversement proportionnelles aux premières.

Ou encore :

Étant donné un nombre quelconque de rapports

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{b_n},$$

construire des droites

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n$$

qui soient entre elles comme les rapports donnés, de telle sorte qu'on ait

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n = \frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} : \frac{a_3}{b_3} : \ldots : \frac{a_n}{b_n}.$$

Les constructions qui permettent de résoudre les questions proposées fournissent aussi des solutions simples et élégantes pour de nombreux problèmes de Géométrie plane.

VI. — Multiplication des droites par des rapports.

15. Il est nécessaire de distinguer tout d'abord les multiplications et les divisions graphiques effectuées entre des droites et des rapports de celles qu'on opère entre des droites et d'autres droites, entre des droites et des surfaces, etc.

Dans le premier cas, on a toujours pour résultat une droite.

Dans le second cas, au contraire, le nombre des dimensions est modifié. La multiplication d'une droite par une droite donne en effet une surface, et celle d'une surface par une droite donne un volume. *Vice versa,* la division d'un volume par une droite donne une surface, et ainsi de suite.

Nous nous occuperons à peu près exclusivement du premier cas, c'est-à-dire de la multiplication et de la division entre droites et rapports ou entre rapports et rapports. Ce n'est que très exceptionnellement, et dans certaines conditions données, que nous traiterons des mêmes opérations entre droites.

16. Le mode le plus simple pour effectuer la multiplication consiste à ajouter un nombre convenable de fois l'un des facteurs à lui-même. Cette opération n'est qu'une addition multiple, dans

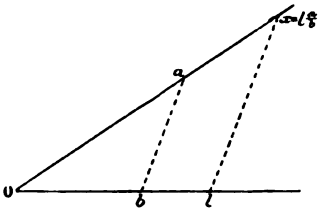
laquelle interviennent deux termes et une condition : le premier terme est la grandeur quelconque qu'il s'agit de répéter plusieurs fois; la condition exprime le nombre de fois que cette grandeur doit être répétée; enfin, le second terme ou produit exprime le résultat de l'opération.

Mais ce procédé, tout simple qu'il soit, ne répondrait pas à la condition essentielle du calcul graphique, laquelle consiste à considérer les droites à l'exclusion des nombres abstraits. Aussi admettrons-nous constamment que le rapport $\frac{a}{b}$, pris comme facteur, est donné par les deux droites a et b.

17. Les relations qui existent entre les côtés de deux triangles semblables offrent en général le moyen le plus commode pour effectuer graphiquement la multiplication d'une droite l par un rapport $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire pour obtenir une nouvelle droite $x = l\frac{a}{b}$. La disposition des trois droites l, a, b, dans la figure devra évidemment être telle que les deux premières, l et a, à multiplier l'une par l'autre, n'appartiennent pas à un même triangle, et qu'elles ne forment pas non plus des côtés homologues dans les deux triangles à construire.

Si la figure ne suggère pas de disposition plus convenable, on formera les deux triangles semblables en coupant un même angle par deux transversales parallèles. Telle est la disposition de la *fig.* 10_a, dans laquelle les longueurs b et l sont comptées sur l'un des côtés de l'angle primitif et à partir de l'origine O. Dans la *fig.* 10_b, les longueurs comptées à partir de l'origine sont a et b, et les transversales parallèles sont elles-mêmes dans le rapport $\frac{a}{b}$.

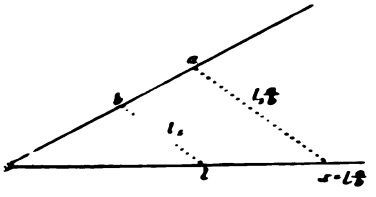
Fig. 10_a.



Nous aurons occasion d'exposer incidemment, dans la suite, diverses autres constructions particulières du même produit. Nous nous bornons, quant à présent, à ce qui précède, afin d'éviter d'inutiles répétitions.

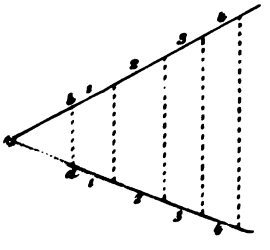
18. L'application d'un procédé analogue à celui que nous venons de suivre permet de multiplier, sans plus de difficulté, plusieurs segments d'une même droite l par le rapport $\frac{a}{b}$. La droite résultante x et la droite donnée fourniront en effet deux ponctuelles projectives semblables (G. 57), et l'on pourra faire la construction de deux manières différentes :

Fig. 10.



Si l'on considère les deux ponctuelles x et l (*fig.* 11) comme sections d'un faisceau ayant son centre à l'infini, a et b seront des segments correspondants des deux ponctuelles ;

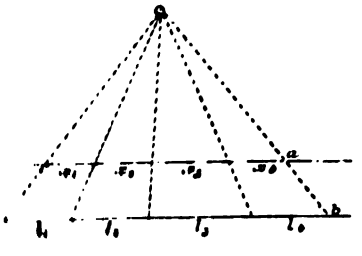
Fig. 11.



Si l'on place le centre du faisceau à distance finie (*fig.* 12), les droites x et l étant parallèles, a et b seront les parties d'un rayon projetant comprises entre le centre du faisceau et les lieux des ponctuelles.

19. La parabole offre encore un moyen pour déterminer $x = l\frac{a}{b}$.

Fig. 12.

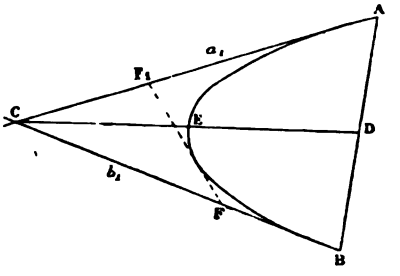


Cette application repose sur ce que, la parabole étant engendrée par deux ponctuelles projectives semblables, deux de ses tangentes sont divisées par toutes les autres en segments proportionnels (G. 139).

Considérons en effet (*fig.* 13) deux tangentes à une parabole, a_1 et b_1, qui se coupent en un point C, et une troisième droite AB, telle que a_1 soit projetée par AB sur b_1 dans le rapport $a : b$. La parabole sera déterminée si l'on prend les extrémités A et B de a_1 comme points de contact des tangentes a_1 et b_1. Dès lors, le rayon CD qui joint le point C au milieu D de AB, est parallèle à l'axe de la parabole et se trouve coupé par la courbe en son point

milieu E. La tangente au point E est d'ailleurs parallèle à AB (G. 138).

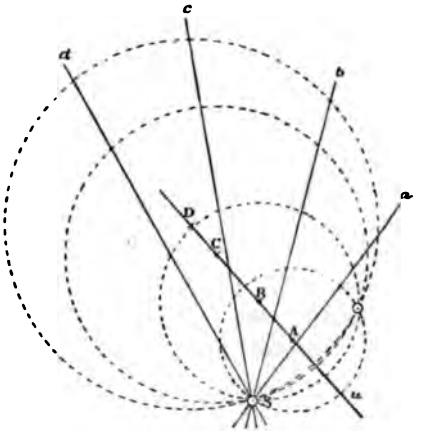
Fig. 13.



On voit aisément que la parabole ainsi construite peut servir à la multiplication d'une droite quelconque l par le rapport $\frac{CB}{CA}$. Il suffit, en effet, de porter la longueur l, à partir du point C, sur la droite qui représente le dénominateur du rapport, par exemple sur CF, et de mener par l'extrémité F une tangente FF_1 à la courbe. Le segment compris entre le point de contact A et l'intersection F_1 représente le produit cherché $x = l\frac{a}{b}$.

20. Nous ferons remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de tracer la parabole, et qu'on peut même éviter le tracé de droites parallèles. Il suffit, en effet, de se donner deux tangentes à la parabole, c'est-à-dire deux droites sur lesquelles soient marquées deux ponctuelles projectives semblables ou égales.

Fig. 14.



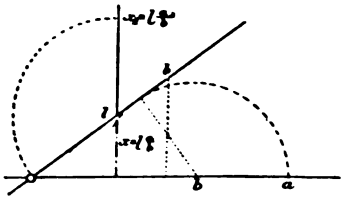
On obtiendra un nombre aussi grand qu'on voudra de ces ponctuelles projectives semblables au moyen de la construction ci-après.

Soient u (ABCD...) (*fig.* 14) une ponctuelle quelconque, et S (*abcd*...) un faisceau de rayons situé d'une manière quelconque par rapport à la ponctuelle. On décrit une suite de circonférences ayant leurs centres aux points A, B, C, D, ... et passant toutes par le centre S du faisceau. Ces circonférences divisent tous les rayons du faisceau en segments

proportionnels et fournissent ainsi autant de ponctuelles projectives semblables à la proposée.

21. Le procédé suivant, pour la détermination de $x = l\frac{a}{b}$, se recommande par sa simplicité pratique.

Fig. 15.



De l'extrémité du segment b comme centre (*fig.* 15), avec le segment a pour rayon, on décrit un arc de cercle auquel on mène une tangente à partir de l'origine de b. Le point situé sur cette tangente à la distance l de la même origine est à la distance x du segment b. Cette distance peut être prise directement avec le compas, sans qu'il soit nécessaire de la tracer.

L'application de ce procédé est particulièrement avantageuse quand on a plusieurs longueurs l à multiplier par le rapport $\frac{a}{b}$. On prend alors des ouvertures de compas égales aux diverses valeurs de l, on les porte sur la tangente à partir de l'origine, et l'on mesure directement les valeurs correspondantes de x.

Cette construction suppose qu'on a $b > a$. S'il en est autrement, on procède suivant l'une des deux méthodes ci-après.

Quand on n'a pas de motif pour obtenir x plutôt d'un côté que de l'autre, on opère simplement la substitution réciproque entre a et b et entre x et l. A cet effet, l'angle à l'origine étant construit de telle façon que son sinus soit égal à $\frac{b}{a}$, on détermine, avec une ouverture de compas égale à l, le point de l'un des côtés qui est à la distance l de l'autre. La longueur cherchée x est donnée par la distance de ce point au sommet de l'angle.

Lorsque les conditions de la figure ne permettent pas d'obtenir x indifféremment de l'un ou de l'autre côté, on procède de la manière suivante :

Soit à déterminer le produit $x_1 = l\frac{a_1}{b}$, a_1 étant plus grand que b. On retranche b de a_1 un certain nombre entier de fois, de façon à obtenir un reste a plus petit que b, mais positif. On a dès lors

$a = a_1 - b$, et par suite

$$x_1 = \frac{a_1}{b} l = \frac{a}{b} l + kl.$$

A la longueur $\frac{a}{b} l$, déterminée comme il a été indiqué plus haut, on ajoute k fois la longueur l. On obtient ainsi la longueur cherchée x_1.

Cette opération est effectuée (*fig.* 15) pour $k = 1$, auquel cas $\frac{a_1}{b} = \frac{a+b}{b}$.

22. *Déterminer les produits* $l_1 \frac{a_1}{b_1}$, $l_2 \frac{a_2}{b_2}$, $l_3 \frac{a_3}{b_3}, \cdots$ *et leur somme*

$$x = l_1 \frac{a_1}{b_1} + l_2 \frac{a_2}{b_2} + l_3 \frac{a_3}{b_3} + \cdots$$

de telle sorte que les multiplications et l'addition soient effectuées en ayant égard aux signes des grandeurs données et que le résultat final puisse être mesuré sur une ligne droite.

Ce problème fournit un cas intéressant d'application et de vérification de la règle des signes.

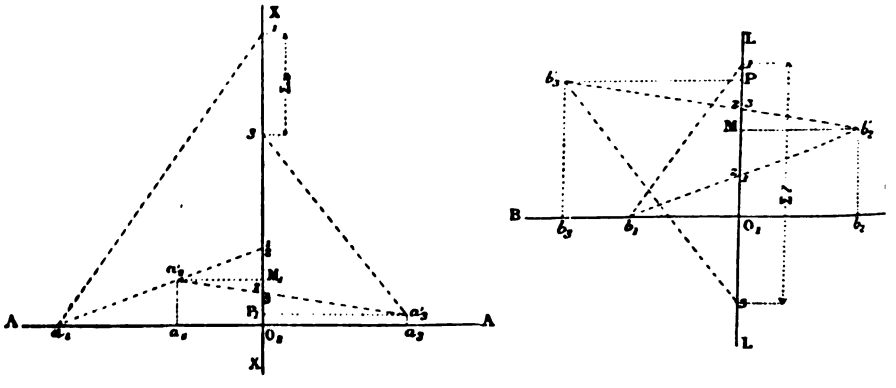
Nous supposons, pour plus de simplicité, l'opération limitée aux trois termes indiqués plus haut. La construction (*fig.* 16) comporte deux figures distinctes, l'une contenant les grandeurs b et l, l'autre les grandeurs a et le résultat cherché.

On trace sur la première figure deux axes, BB et LL, qui se coupent au point O_1 sous un angle quelconque, et sur la seconde figure deux autres axes, AA et XX, respectivement parallèles à ceux de la première. On porte les valeurs de b sur BB à partir de l'origine O_1 et en ayant égard aux signes, c'est-à-dire en plaçant les grandeurs positives à gauche, par exemple, et les grandeurs négatives à droite. On porte de la même manière les valeurs de a sur AA à partir de l'origine O_2. Dans le cas de la figure, a_1, a_2, b_1 et b_3 sont positifs, a_3 et b_2 sont négatifs.

On porte enfin les longueurs l sur l'axe LL, non plus à partir d'une origine commune, mais bout à bout, en prenant pour point de départ un point quelconque 1 de LL et en tenant compte des

signes. Toute longueur l aura donc son origine à l'extrémité de la longueur précédente et se dirigera vers la partie inférieure de l'axe ou vers la partie supérieure, selon qu'elle sera positive ou négative. Nous convenons d'appeler Σl la portion de droite qu'on obtient en faisant ainsi la somme algébrique des longueurs l proposées. Dans le cas de la figure, l_1 et l_3 sont positifs, l_2 est négatif. L'origine et l'extrémité de chaque longueur l portent d'ailleurs, à droite ou à gauche de l'axe LL, l'indice de la longueur considérée ; d'où il

Fig. 16.



suit que l'origine et l'extrémité de la somme Σl sont respectivement indiquées par les indices de la première et de la dernière grandeur l, et que tout point intermédiaire porte les indices des deux segments auxquels il appartient.

Pour compléter le canevas nécessaire à la construction, on mène par les extrémités des divers segments a et b des parallèles aux axes XX et LL.

Cela fait, on projette, dans la première figure, les extrémités de la droite l_1, à partir du point b_1, au moyen des rayons b_1 1 et b_1 (1, 2). Du point a_1, dans la seconde figure, on mène parallèlement à ces rayons deux autres rayons qui coupent l'axe XX en deux points désignés par les mêmes indices que les points correspondants de l'axe LL, savoir : le point 1, dont le rayon de projection est parallèle à $b_1$1, et le point (1, 2), dont le rayon est parallèle à b_1(1, 2). On a soin de prolonger ces rayons, en vue des constructions ultérieures. On désigne par x_1 la portion de l'axe XX

comprise entre les deux rayons qui partent du point a_1; x_1 correspond à la portion l_1 de l'axe LL.

Cette construction fournit deux triangles semblables, dans lesquels deux droites homologues, telles que les parallèles $O_1 b_1 = b_1$ et $O_2 a_1 = a_1$, sont entre elles dans le même rapport que les côtés. On a donc

$$a_1 : b_1 = x_1 : l_1,$$

d'où

$$x_1 = l_1 \frac{a_1}{b_1}.$$

x_1, premier terme de la somme cherchée, apparaît comme positif, puisqu'il est porté dans la même direction que l_1; il n'en pouvait être autrement, à raison des signes de ses trois facteurs.

Pour construire le second produit $l_2 \frac{a_2}{b_2}$, on détermine d'abord les points d'intersection b'_2 et a'_2 des rayons $b_1(1, 2)$ et $a_1(1, 2)$, respectivement avec les droites $b_2 b'_2$ et $a_2 a'_2$ parallèles aux axes LL et XX, et l'on mène le rayon $b'_2(2,3)$. La droite l_2 se trouve ainsi projetée du point b'_2 par ce nouveau rayon et par $b'_2(1,2)$ ou $b'_2 b_1$. Pour déterminer sur XX le segment qui correspond à l_2, on a déjà la droite $a'_2(1,2)$, partie de $a_1(1,2)$, et l'on mène $a'_2(2,3)$ parallèle à $b'_2(2,3)$. On obtient ainsi les triangles semblables $b'_2(1,2)(2,3)$ et $a'_2(1,2)(2,3)$. On mène parallèlement à AA les droites homologues $b'_2 M = b_2$ et $a'_2 M_1 = a_2$; on représente par x_2 la portion de XX limitée par les points $(1,2)$ et $(2,3)$, et l'on a

$$x_2 : l_2 = a_2 : b_2,$$

$$x_2 = l_2 \frac{a_2}{b_2}.$$

L'extrémité de x_1 étant en même temps l'origine de x_2, on a immédiatement x_2 à la suite de x_1 et dans la direction inférieure de l'axe, c'est-à-dire dans la direction positive que comportent les signes de ses trois facteurs.

La construction du troisième terme nécessite d'abord la détermination des points d'intersection, b'_3 et a'_3, des rayons déjà tracés $b'_2(2,3)$, $a'_2(2,3)$ et des parallèles à l'axe LL passant par b_3 et par a_3. Pour projeter le segment l_3 à partir du premier point b'_3 et

pour trouver ensuite le segment correspondant x_3 sur XX, il suffit de tracer $b'_3 3$ et de mener $a'_3 3$ parallèle à cette dernière droite. Dans le troisième couple de triangles semblables ainsi obtenus, les droites $b'_3 P$ et $a'_3 P_1$, menées parallèlement à BB et à AA jusqu'à leurs rencontres respectives avec XX et LL, représentent b_3 et a_3, et l'on a

$$x_3 : l_3 = a_3 : b_3,$$

$$x_3 = l_3 \frac{a_3}{b_3}.$$

D'après l'hypothèse adoptée, le segment x_3 doit être négatif; il est porté, en effet, dans la direction supérieure de l'axe, c'est-à-dire dans la direction négative, et, de même que les longueurs l sur l'axe LL, les segments x sont additionnés sur l'axe XX en ayant égard à leurs signes. Le segment de ce dernier axe compris entre l'origine 1 et l'extrémité 3 représente donc bien la somme algébrique cherchée.

On obtiendrait d'une manière analogue la somme

$$x = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3.$$

VII. — Polygone de multiplication.

23. Considérons maintenant le cas où, dans le problème précédent, les dénominateurs $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont égaux. Ce cas peut s'énoncer ainsi :

Réduire à la base constante b une somme de produits donnés

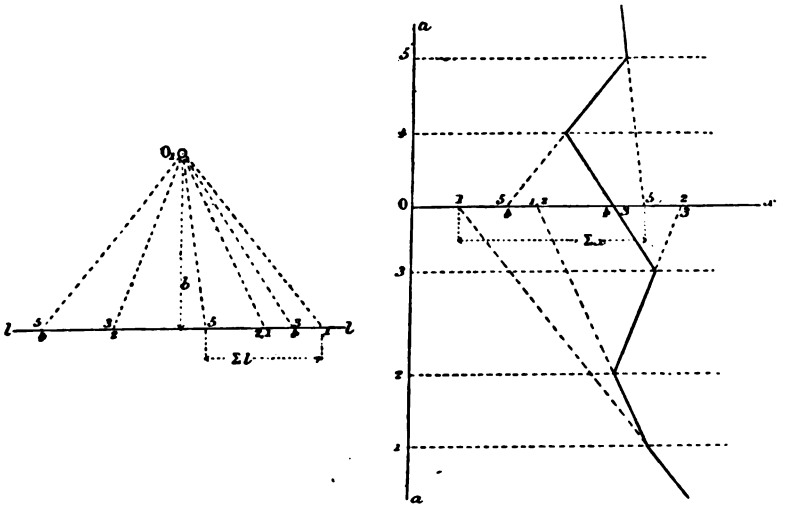
$$a_1 l_1 = b x_1, \quad a_2 l_2 = b x_2, \quad a_3 l_3 = b x_3, \quad \ldots, \quad a_n l_n = b x_n.$$

Voici l'une des solutions que comporte le problème ainsi posé.

On porte, en ayant égard aux signes, les segments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sur un axe aa (*fig.* 17) de part et d'autre d'une commune origine O. Sur un second axe ll, non parallèle à aa, on porte les segments $l_1, l_2, \ldots, l_n$ bout à bout, en ayant aussi égard à leurs sens. Le segment compris entre l'origine de l_1 et l'extrémité de l_n est alors égal à Σl. On projette la ponctuelle l ainsi obtenue d'un point O_1, dont la distance à la droite l, mesurée parallèlement à l'axe aa, doit être égale à b. On projette ensuite la première ponctuelle ob-

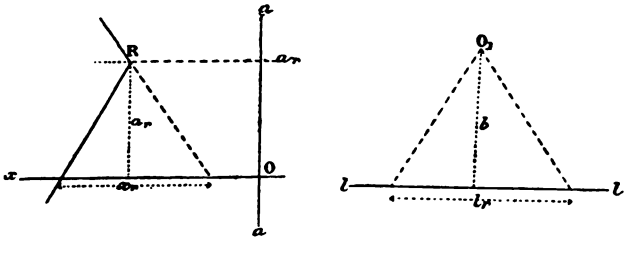
tenue sur *aa* au moyen de rayons parallèles à l'axe *ll*, et l'on relie ces rayons deux à deux par un contour polygonal formé de segments de droites respectivement parallèles aux rayons du faisceau O_1 dont les extrémités portent les mêmes indices. Les côtés de ce con-

Fig. 17.



tour polygonal, convenablement prolongés, déterminent sur la droite Ox, parallèle à *ll*, les segments cherchés $x_1, x_2, \ldots$; ces segments sont disposés bout à bout et eu égard à leurs sens, en

Fig. 18.



sorte que le segment compris entre l'origine de x_1 et l'extrémité de x_n est égal à Σx, et que la somme des produits cherchés est représentée par $b\Sigma x$.

Soit en effet (*fig.* 18) R le sommet du contour polygonal qui

tombe sur le rayon projetant l'extrémité du segment a_r; les deux côtés du contour passant par R sont respectivement parallèles aux rayons du faisceau O_1 qui projettent les extrémités du segment l_r. Menons par R une parallèle à aa; nous aurons, autour des centres R et O_1, trois couples de rayons parallèles, déterminant, sur les transversales parallèles Ox, ll, trois couples de points correspondants de deux ponctuelles projectives semblables (G. 57). Il existe dès lors entre les segments correspondants la relation de proportionnalité

$$x_r : l_r = a_r : b, \quad \text{d'où} \quad x_r = \frac{a_r l_r}{b}.$$

En outre, les côtés du contour polygonal, et par conséquent les segments x, se succèdent dans le même ordre que les segments l; d'où il suit que les produits $\frac{al}{b}$ s'ajoutent dans le même ordre que les segments l.

Il résulte encore de cette identité dans l'ordre de succession qu'un côté quelconque du contour polygonal, par exemple celui qui se trouve compris entre les sommets R — 1 et R, est parallèle au rayon du faisceau O_1 qui sépare les segments correspondants de l, c'est-à-dire les segments l_{r-1} et l_r. Il est d'ailleurs facile de reconnaître : 1° que la somme des x est effectuée en ayant égard aux sens des a et des b; 2° que le signe du produit change si l'on change le signe d'un seul facteur et qu'il reste constant si l'on change simultanément les signes de deux facteurs; 3° enfin que la somme des x n'est pas modifiée quand on change l'ordre de succession des l, pourvu qu'on change de la même manière l'ordre de succession des a.

On donne au contour polygonal que nous venons de construire le nom de *polygone de multiplication*.

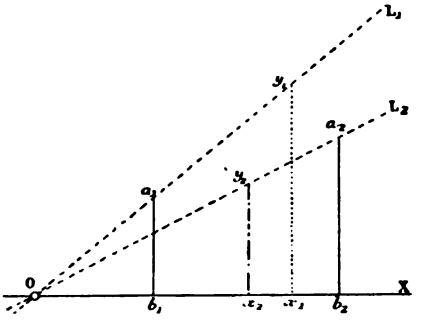
VIII. — Multiplication des rapports.

24. Les triangles semblables, qui nous ont permis d'effectuer la multiplication d'une droite par un rapport, se prêtent aussi à la détermination du produit de deux ou plusieurs rapports.

S'il s'agit, par exemple, de former le produit de deux rapports

donnés, $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$, on porte, à partir d'une origine quelconque O (*fig.* 19), les dénominateurs b_1, b_2 en abscisses; aux extrémités de ces abscisses, on porte les numérateurs a_1, a_2 en ordonnées. On joint l'origine aux extrémités de a_1 et de a_2 par les droites L_1 et L_2; on élève ensuite à l'extrémité d'une abscisse quelconque Ox_1 l'ordonnée y_1, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec L_1; on prend la longueur de cette ordonnée y_1 comme seconde abscisse Ox_2 et l'on élève à l'extrémité de x_2 l'ordonnée y_2, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la droite L_2. On a ainsi construit deux couples de triangles semblables, Oa_1b_1 et Oy_1x_1, Oa_2b_2 et Oy_2x_2, qui donnent les proportions

Fig. 19.



$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_2};$$

multipliant membre à membre et considérant que, d'après la construction, $x_2 = y_1$, on a

$$\frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1}.$$

25. On obtient d'une manière analogue le produit d'un nombre quelconque de rapports

$$\frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ \frac{a_3}{b_3}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{b_n}.$$

On commence par tracer à cet effet, comme dans le cas précédent, les droites L_1, L_2, L_3, ..., L_n qui correspondent aux rapports donnés. On choisit une abscisse initiale quelconque x_1; on détermine l'ordonnée correspondante y_1 relative à L_1, on prend une nouvelle abscisse x_2 égale à y_1 et l'on détermine l'ordonnée correspondante y_2 relative à L_2; on prend ensuite $x_3 = y_2$, et l'on construit l'ordonnée correspondante y_3 relative à L_3; et ainsi de

suite, jusqu'à la droite L_n, qui aura pour correspondante la dernière ordonnée y_n.

On a ainsi les équations

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{a_2}{b_2},$$

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{a_3}{b_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{a_n}{b_n};$$

en faisant les produits et en réduisant, on a

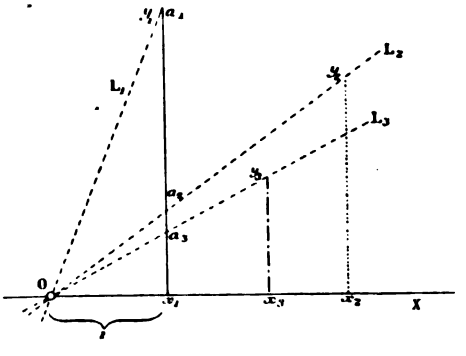
$$\frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{b_2}\,\frac{a_3}{b_3}\cdots\frac{a_n}{b_n} = \frac{y_n}{x_1},$$

d'où résulte ce théorème :

Le produit d'une suite de rapports est représenté par le rapport entre la dernière ordonnée et l'abscisse initiale.

Quand la première abscisse est égale à l'unité (*fig.* 20), le produit des rapports est égal à y_n.

Fig. 20.



Si, en effectuant les produits, on voulait tenir compte du signe de chaque facteur, il faudrait ajouter à l'énoncé du théorème que *le*

signe du produit est déterminé par celui de la dernière ordonnée.

Pour tenir compte des signes qui affectent les divers facteurs, il suffit de prendre un système quelconque d'axes coordonnés et de tracer les diverses droites L, à partir de l'origine, en ayant soin de placer dans la première et dans la troisième région du système celles de ces droites qui correspondent aux rapports positifs, dans la seconde et dans la quatrième région celles qui correspondent aux rapports négatifs. En exécutant la construction d'après cette règle, on retombe précisément sur le théorème précédent, complété en ce qui concerne les signes.

On reconnaît que tel doit bien être en effet le résultat final en vérifiant que, dans la construction effectuée, le signe d'aucun rapport particulier ne peut être changé. On prend à cet effet un rapport positif ou négatif $\pm\frac{a}{b}$, on trace la droite L correspondante; on prend l'abscisse initiale x d'abord positive, ensuite négative; l'ordonnée correspondante y aura toujours une position telle, que le nouveau rapport $\frac{y}{x}$ concordera non seulement comme valeur absolue, mais encore comme signe, avec le rapport donné $\frac{a}{b}$. On vérifie par là que l'abscisse initiale peut être indifféremment positive ou négative sans que, dans aucun cas, le signe du rapport soit changé; conséquemment, si l'on commence par une abscisse positive, l'ordonnée correspondante devra toujours représenter le signe du rapport.

Le procédé de multiplication indiqué n'ayant jamais pour effet de changer le signe d'un rapport particulier, il en résulte que le signe du produit doit aussi rester le même; et, puisque toutes les abscisses intermédiaires disparaissent dans la multiplication, on doit conclure d'une manière générale que le signe du produit est bien déterminé par celui de la dernière ordonnée.

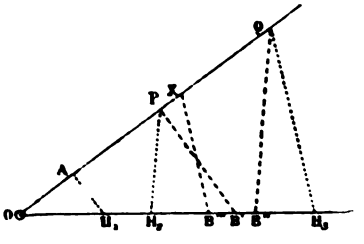
Ici, comme en Arithmétique, *l'ordre de succession des facteurs est sans influence sur le résultat final,* et, de même qu'en Arithmétique l'interversion des facteurs permet de vérifier l'exactitude du calcul effectué, de même, dans notre cas, on peut, par le changement des indices, modifier l'ordre arbitraire des facteurs et vérifier ainsi l'exactitude du dessin.

26. Soit à déterminer

$$x = \frac{abcd}{hkl}.$$

On porte sur une droite, à partir d'une origine commune (*fig.* 21), les longueurs $OH_1 = h$, $OH_2 = k$, $OH_3 = l$, $OB' = b$, $OB'' = c$, $OB''' = d$. On porte $OA = a$ sur une seconde droite, qui passe par le point O et qui est coupée respectivement en P, Q, X par la droite B'P parallèle à H_1A, par la droite B''Q parallèle à H_2P et par la droite B'''X parallèle à H_3Q. On détermine ainsi (G. 260) les couples de triangles homothétiques OB'P et OH_1A, OB''Q et OH_2P, OB'''X et OH_3Q, et l'on a

Fig. 21.



$$OP = \frac{ab}{h}, \quad OQ = \frac{abc}{hk} \quad \text{et} \quad OX = \frac{abcd}{hkl} = x\,(^1).$$

IX. — Produits de segments.

27. Considérons encore le cas de la multiplication où il s'agit d'obtenir le produit de plusieurs segments a_1, a_2, a_3.

Si l'on désigne ce produit par y_3, on a identiquement

$$y_3 = a_1 a_2 a_3 = \frac{a_1}{1}\,\frac{a_2}{1}\,\frac{a_3}{1},$$

et la construction s'effectue suivant le procédé précédemment indiqué. On prend (*fig.* 20) $Ox_1 = 1$; on élève à l'extrémité x_1 une perpendiculaire sur laquelle on porte les segments a_1, a_2, a_3; on mène ensuite, de l'origine aux extrémités de ces segments, les rayons L_1, L_2, L_3; on prend a_1 comme ordonnée de L_1 correspondant à l'abscisse $Ox_1 = 1$; on fait $x_2 = y_1$, et l'on détermine sur x_2 l'ordonnée y_2 correspondant au rayon L_2; enfin on fait $x_3 = y_2$

(1) Au sujet de cette construction et de quelques autres analogues, voir KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, erster Theil; Leipzig, 1803, p. 552-553.

et on élève à l'extrémité de x_3 l'ordonnée y_3 correspondant à L_3. Cette ordonnée est le produit des trois segments proposés.

On obtiendrait de la même manière le produit d'un nombre quelconque de segments

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

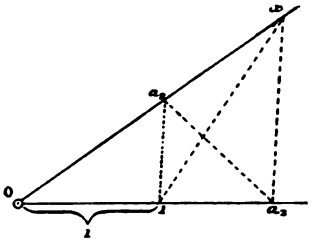
On peut encore recourir à cet autre procédé.

Soit à construire d'abord le produit

$$x = a_1 a_2.$$

On porte (*fig.* 22) les grandeurs données a_1, a_2 sur deux axes, et l'on transforme le triangle $a_1 O a_2$ en un autre $1 O x$ ayant même aire, mais dont un côté soit égal à l'unité. La parallèle $a_1 x$ à $a_2 1$ détermine l'extrémité du segment x, qui doit être mesuré à partir de l'origine O. On a ainsi :

Fig. 22.



$$a_1 : x = 1 : a_2,$$

d'où

$$x = a_1 a_2.$$

Pour former ensuite le produit

$$x = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

on prend successivement, comme côtés du triangle, chaque résultat partiel et le facteur qui suit immédiatement ce résultat; une réduction analogue à celle qui vient d'être indiquée donne le produit suivant, et l'on parvient au produit total par une suite d'opérations consécutives semblables.

X. — Division.

28. Nous avons dit que la multiplication graphique peut être considérée comme une addition multiple. On peut dire pareillement que la division est une soustraction à indice multiple. A ce point de vue, la division se présente sous deux formes distinctes. On

peut se proposer, en effet, soit de *chercher combien de fois une grandeur linéaire est contenue dans une autre,* soit de *partager une ligne en un certain nombre de parties égales.*

Dans le premier cas, les deux termes sont donnés et l'on cherche l'indice; l'opération se réduit alors au problème bien connu qui consiste à mesurer une droite au moyen d'une autre droite.

Dans le second cas, au contraire, l'indice et le terme total étant donnés, il s'agit de déterminer le terme à soustraire.

L'opération du second cas, c'est-à-dire la division d'une droite a en n parties égales, équivaut à la multiplication de a par un rapport $\frac{c}{b}$, dans lequel c est un segment arbitraire et b un segment égal à n fois c. On sait, du reste, que cette opération peut être facilement effectuée en projetant sur la grandeur donnée les n divisions égales obtenues, sur une droite auxiliaire, par l'addition multiple d'une unité arbitraire. Cette droite auxiliaire doit être parallèle à la droite donnée ou passer par son origine. Dans le premier cas, on doit mener par chaque division intermédiaire de la droite auxiliaire une parallèle à la transversale qui passe par les extrémités de la droite auxiliaire et de la droite donnée. Dans le second cas, la projection de la droite auxiliaire sur la droite donnée s'effectue à partir du point d'intersection des deux côtés obliques du trapèze déterminé par les extrémités des deux parallèles à projeter, et ces parallèles sont les seules dont la construction nécessite le tracé.

On peut encore parvenir au résultat, sans avoir recours à aucun tracé de parallèles, en se fondant sur une propriété connue de la parabole. On sait en effet (G. 99) que, si l'on divise une tangente quelconque à la parabole en n parties égales, à partir du point de contact, chacune des n tangentes menées à la courbe par les points de division est elle-même divisée en parties égales par toutes les autres. On sait de plus que toute autre tangente à la parabole est aussi divisée en parties égales par les précédentes, avec cette seule différence que le point de contact de la nouvelle tangente n'est plus un point d'égale division.

29. Quand on a à diviser une droite l par un rapport $\frac{a}{b}$, on écrit

$$l : \frac{a}{b} = x,$$

et l'on en déduit

$$x = l\frac{b}{a}.$$

La division d'une droite par un rapport revient donc à la multiplication de la droite par l'inverse du rapport.

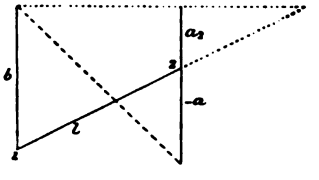
On appelle encore *division* l'opération par laquelle une droite de longueur donnée est divisée en parties proportionnelles aux segments d'une autre droite donnée.

Les longueurs totales des deux droites données font alors l'office des termes a et b du rapport précédemment considéré, et la transversale extrême est déterminée par les extrémités de ces deux longueurs, portées à partir d'une commune origine. Si les deux droites sont parallèles, on joint leurs extrémités deux à deux par deux autres droites dont le point de concours est le centre de projection des premières.

Lorsqu'il s'agit de diviser la longueur l seulement en deux segments qui soient entre eux comme $\frac{-a}{+b}$ ou comme $\frac{a_1}{b}$, on porte les droites $-a$ ou a_1 et b sur deux parallèles menées par les extrémités de l (*fig.* 23). La droite de jonction des extrémités de ces segments détermine sur l le point cherché.

L'exactitude de la construction est d'autant plus grande que la droite joignant les extrémités de a_1 et de b coupe la droite l sous un angle moins aigu. La plus grande ouverture possible de cet angle correspond au cas où les segments parallèles a_1 et b sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs extrémités. Si l'angle était encore trop aigu, il conviendrait d'augmenter son ouverture en portant deux ou plusieurs fois les segments a_1 et b sur les parallèles.

Fig. 23.



30. Pour former le quotient de deux rapports $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, c'est-à-dire pour exprimer ce quotient par le rapport de deux droites, on réduit les rapports donnés au même dénominateur suivant la mé-

thode indiquée (**12**), et l'on a

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{N} : \frac{y_2}{N} = \frac{y_1}{y_2}.$$

On peut, de la même manière, déterminer un numérateur commun. On a, dans ce cas,

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Le choix d'un numérateur ou d'un dénominateur commun n'ayant aucune influence sur le résultat, on pourra déterminer l'un ou l'autre, après s'être donné arbitrairement l'une des grandeurs du rapport final.

On pourra encore renverser l'un des rapports et effectuer la multiplication suivant la méthode précédemment indiquée (**22**).

31. Pour exprimer par une seule droite le quotient de deux droites a et b, c'est-à-dire pour déterminer $y = \frac{a}{b}$, on observe que cette relation peut être mise sous la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1}.$$

Pour résoudre graphiquement cette proportion, on prend deux axes coordonnés quelconques, on porte sur l'un d'eux, à partir de l'origine O, le dénominateur donné b et l'unité; on porte sur l'autre le numérateur a, on joint les extrémités de a et de b par une droite, et l'on mène à celle-ci, par l'extrémité de la droite qui représente l'unité, une parallèle qui détermine sur l'axe des numérateurs la droite cherchée y.

32. Une méthode analogue à celle que nous avons exposée (**18**) pour la multiplication de plusieurs segments d'une même droite l par un même rapport $\frac{a}{b}$ fournira le moyen de diviser plusieurs droites $l_1, l_2, l_3, \ldots$, ou plusieurs segments d'une même droite l

par un même rapport $\frac{a}{b}$. Il suffira de multiplier par le rapport inverse, c'est-à-dire par $\frac{b}{a}$.

XI. — Calcul des formules rationnelles.

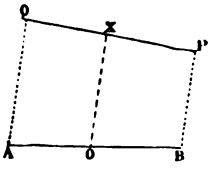
33. Une expression rationnelle quelconque peut être calculée au moyen d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions. Il convient cependant de savoir construire par des procédés plus expéditifs certaines formules qui se présentent fréquemment.

L'expression

$$x = \frac{ap + bq}{a + b},$$

par exemple, pourrait être construite en ajoutant l'une à l'autre les deux quatrièmes proportionnelles $\frac{ap}{a+b}$ et $\frac{bq}{a+b}$. Mais, si l'on place bout à bout (*fig.* 24) les segments AO et OB, respectivement équipollents aux segments a et b, et si des points A et B on mène les droites parallèles $AQ = q$, $BP = p$, le quatrième côté PQ du trapèze ABPQ coupera la droite OX, parallèle aux droites AQ et BP, en un point X, tel que $OX = x$. La construction s'applique au cas où l'une des quantités contenues dans la formule proposée est négative. On peut d'ailleurs l'étendre à l'expression

Fig. 24.



$$x = \frac{ap + bq + cr}{a + b + c}.$$

34. Si l'on avait à construire l'expression

$$x = \frac{mp}{mp + nq} a,$$

on déterminerait d'abord $r = \frac{nq}{m}$, et l'expression proposée se trou-

verait ramenée à cette autre :

$$x = \frac{p}{p+r} a,$$

c'est-à-dire à une formule dont la construction rentre dans les procédés connus.

CHAPITRE II.

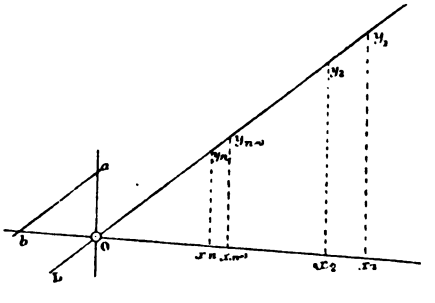
ÉLÉVATION AUX PUISSANCES ET EXTRACTION DES RACINES.

COUSINERY, *Le Calcul par le trait*, etc.; Paris, 1840, p. 24-47. — EGGERS, *Grundzüge einer graphischen Arithmetik;* Schaffhausen, 1865, p. 3-15. — CULMANN, *Die graphische Statik;* Zürich, 1866, p. 12-20. — SCHLESINGER, *Potenzcurven* (*Zeitschrift des æst. Ing. u. Arch. Vereins*, XVIII Jahrg., VI et VII Heft); Wien, 1866. — JÄGER, *Das graphische Rechnen;* Speyer, 1867, p. 18-23. — SCHLESINGER, *Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik;* Wien, 1868-69, p. 7-16. — REULEAUX, *Der Constructeur;* Braunschweig, 1869, p. 81-87. — FAVARO, *Sulle prime operazioni del Calcolo grafico;* Venezia, 1872, p. 28-71.— VON OTT, *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik;* Prag, 1879, §§ 8-9. — BELLAVITIS, *Considerazioni sulla Matematica pura;* Venezia, 1872, Nota (29). — LEVY, *La Statique graphique*, etc; Paris, 1874, § 14. — CREMONA, *Elementi di Calcolo grafico;* Torino, 1874, Cap. IV et V. — CULMANN, *Die graphische Statik;* Zürich, 1875, nos 3-4.

I. — Élévation aux puissances.

35. On détermine la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un rapport $\frac{a}{b}$ en multipliant ce rapport n fois par lui-même. Pour effectuer cette opération conformément aux règles graphiques déjà données (24), on fait passer par l'origine O d'un système d'axes (*fig.* 25) une droite L dont l'inclinaison satisfasse au rapport $\frac{a}{b}$; on prend arbitrairement une abscisse initiale x_1, et l'on détermine l'ordonnée y_1 du point de L qui correspond à cette abscisse ; on prend ensuite

Fig. 25.



$x_2 = y_1$, et l'on détermine l'ordonnée y_2 correspondant à x_2; on prend comme nouvelle abscisse $x_3 = y_2$, et l'on détermine la nouvelle ordonnée correspondante y_3. Cette opération, répétée n fois, donne successivement

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{b},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{a}{b}.$$

Multipliant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{y_1}{x_1}\,\frac{y_2}{x_2}\dots\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\,\frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Mais on a vu que le produit d'un nombre quelconque de rapports est représenté par le rapport qui existe entre la dernière ordonnée et l'abscisse initiale (25). On aura donc

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{y_n}{x_1},$$

expression dans laquelle le signe de la puissance cherchée est déterminé par celui de la dernière ordonnée. Si l'on avait pris pour abscisse initiale l'unité, on aurait

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = y_n.$$

On peut avoir $\frac{a}{b} \gtreqless 1$, et la distinction de ces trois cas donne lieu à des remarques utiles au point de vue de l'exécution du dessin.

Quand on a $\frac{a}{b} > 1$, les ordonnées sont toujours plus grandes que les abscisses, et les deux coordonnées croissent d'autant plus rapidement que a est plus grand par rapport à b. Il peut arriver en ce cas que, par suite de la grandeur du rapport et du degré élevé de la puissance, la construction dépasse les limites assignées à l'épure. On échappe à cette difficulté en renversant le rapport donné. La

construction se dirige alors vers l'origine des coordonnées, et l'on obtient comme résultat la $n^{\text{ième}}$ puissance du rapport $\frac{b}{a}$. Ce résultat doit être renversé à son tour; c'est-à-dire que, si l'on a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{y_n}{x_1},$$

on aura ainsi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{x_1}{y_n}.$$

Si $\frac{a}{b} = 1$, chaque ordonnée est égale à l'abscisse qui lui correspond, et toutes les puissances du rapport ont même valeur que le rapport lui-même.

Enfin, quand on a $\frac{a}{b} < 1$, la construction converge vers l'origine O, et il faut donner à l'abscisse initiale x_1 une longueur suffisante pour que l'ordonnée y_n puisse être facilement distinguée et mesurée.

Si le rapport donné $\frac{a}{b}$ est négatif, la droite L est située au-dessous de la partie positive et au-dessus de la partie négative de l'axe des x.

Les abscisses successives sont alors portées alternativement à droite et à gauche de l'axe des y, et la construction va se rapprochant ou s'éloignant de l'origine selon que $\frac{a}{b}$ est plus petit ou plus grand que l'unité.

36. Parmi les différents cas que présente l'élévation aux puissances, nous distinguerons celui qui est relatif à la multiplication plusieurs fois répétée d'une droite l par un rapport $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire à la construction des produits

$$\frac{a}{b},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2,\quad l\left(\frac{a}{b}\right)^3,\quad \ldots,\quad l\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ces produits peuvent être considérés comme résultant d'une suite

de quatrièmes proportionnelles. On a, par exemple,

$$x_1 : l = a : b, \quad x_1 = l\frac{a}{b},$$

$$x_2 : x_1 = a : b, \quad x_2 = x_1\frac{a}{b} = l\left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

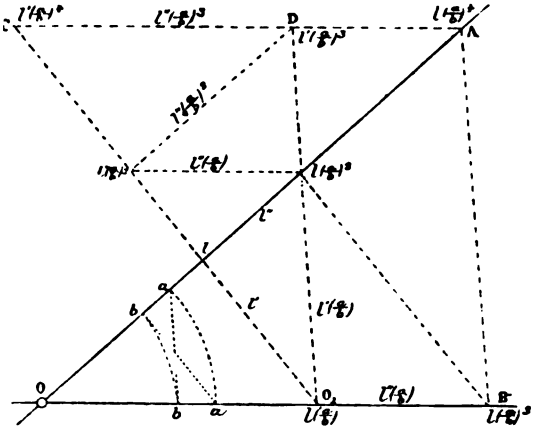
$$x_3 : x_2 = a : b, \quad x_3 = x_2\frac{a}{b} = l\left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n : x_{n-1} = a : b, \quad x_n = x_{n-1}\frac{a}{b} = l\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

On effectue ces constructions en déterminant dans un angle $\widehat{AOB}$ (*fig.* 26), au moyen de deux arcs de cercle décrits du centre O, les

Fig. 26.



deux directions dites *antiparallèles* qui projettent réciproquement, dans le rapport $\frac{a}{b}$, les segments de OA sur OB et ceux de OB sur OA. On porte la longueur l sur OA, et par l'extrémité de l on mène à la première des deux directions une parallèle qui détermine sur OB l'extrémité du segment $l\frac{a}{b}$. Une antiparallèle, c'est-à-dire une parallèle à la seconde direction, menée par l'extrémité de $l\frac{a}{b}$, fournit $l\left(\frac{a}{b}\right)^2$ sur OA, et ainsi de suite.

Les longueurs déterminées ainsi sur OA et sur OB, et toujours comptées à partir du point O, forment deux progressions géométriques dont la raison est $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, savoir:

$$l,\ l\left(\frac{a}{b}\right)^2,\ l\left(\frac{a}{b}\right)^4,\ \ldots$$

et

$$l\frac{a}{b},\ l\left(\frac{a}{b}\right)^3,\ l\left(\frac{a}{b}\right)^5,\ \ldots.$$

Les transversales consécutives forment pareillement une progression géométrique

$$l',\ l'\frac{a}{b},\ l'\left(\frac{a}{b}\right),\ l'\left(\frac{a}{b}\right)^3,\ \ldots,$$

dont la raison est $\frac{a}{b}$.

Si entre deux droites antiparallèles consécutives, par exemple entre les deux premières qui se coupent en O_1, on continue la progression l', $l'\frac{a}{b}$, ... au moyen de transversales alternativement parallèles à OB et à OA, on obtient une figure CO_1D analogue à AOB, et dont les côtés forment les progressions

$$l',\ l'\left(\frac{a}{b}\right)^2,\ l'\left(\frac{a}{b}\right)^4,\ \ldots,$$

et

$$l'\frac{a}{b},\ l'\left(\frac{a}{b}\right)^3,\ l'\left(\frac{a}{b}\right)^5,\ \ldots.$$

Les transversales antiparallèles forment en même temps la progression

$$l'',\ l''\frac{a}{b},\ l''\left(\frac{a}{b}\right)^2,\ l''\left(\frac{a}{b}\right)^3,\ \ldots.$$

Donc les segments de OA et de OB compris entre la première et la deuxième transversale, entre la deuxième et la troisième, etc., constituent aussi une progression géométrique; c'est là d'ailleurs une conséquence immédiate de la similitude des triangles formés

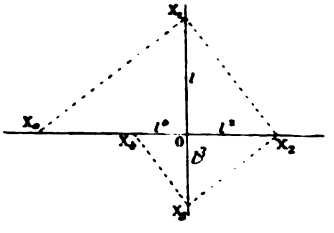
chacun par l'un de ces segments et par deux transversales antiparallèles successives.

37. Si l'on fait, dans le calcul précédent,

$$a = l \quad \text{et} \quad b = 1,$$

on obtient, par la même méthode, les puissances successives de l. Ces puissances peuvent encore être construites très simplement de la manière suivante.

Fig. 27.



On prend un système d'axes orthogonaux (*fig.* 27), on fait $OX_0 = 1$ et $OX_1 = l$, on joint X_0X_1, on élève en X_1 la perpendiculaire X_1X_2 sur X_0X_1, on élève en X_2 la perpendiculaire X_2X_3 sur X_1X_2, et ainsi de suite. On obtient ainsi

$$OX_2 = l^2, \quad OX_3 = l^3, \quad OX^4 = l^4, \quad \ldots.$$

Les triangles semblables OX_0X_1, OX_1X_2 donnent en effet

$$OX_0 : OX_1 = OX_1 : OX_2,$$

c'est-à-dire

$$1 : l = l : OX_2$$

d'où

$$OX_2 = l^2.$$

La similitude des triangles OX_1X_2, OX_2X_3 conduit pareillement à reconnaître que $OX_3 = l^3$; la similitude des triangles OX_2X_3, OX_3X_4 donne $OX_4 = l^4$, et ainsi de suite.

Il convient d'ajouter ici quelques remarques au sujet des valeurs de l par rapport à l'unité.

Pour $l < 1$, les puissances successives deviennent de plus en plus petites et la construction s'approche de plus en plus de l'origine.

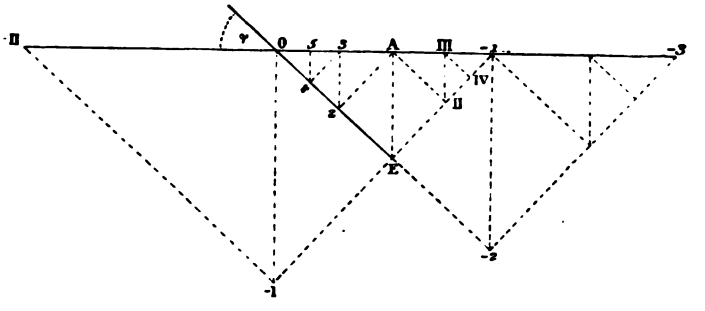
Pour $l > 1$, surtout quand on opère sur des puissances élevées, la construction atteint bientôt la limite du papier. On peut alors

construire les puissances de $\frac{1}{l}$, c'est-à-dire déterminer graphiquement l'inverse du résultat, qu'il suffira d'intervertir ensuite.

38. On formera de la même manière les puissances des fonctions trigonométriques.

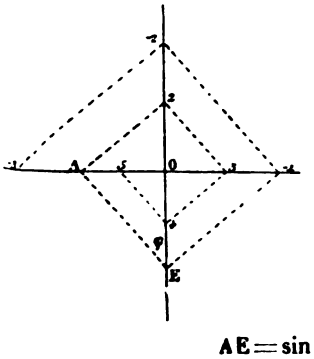
Pour élever, par exemple, à une puissance quelconque le sinus et le cosinus d'un angle donné $\widehat{EOA} = \varphi$ (*fig.* 28), on prend

Fig. 28.



OE = 1, on abaisse EA perpendiculaire sur OA, on mène les perpendiculaires et contre-perpendiculaires A2, 2-3, 3-4, ..., E(— 1), (— 1)(— 2), et l'on a

Fig. 29.



$$OA = \cos\varphi, \quad O2 = \cos^2\varphi,$$
$$O3 = \cos^3\varphi, \quad O4 = \cos^4\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$O(-1) = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad O(-2) = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Traçant les perpendiculaires et les contre-perpendiculaires AII, II-III, III-IV, . ., O(—I), (—I)(—II)...., on a

$$AE = \sin\varphi, \quad AII = \sin^2\varphi,$$
$$II\text{-}III = \sin^3\varphi, \quad III\text{-}IV = \sin^4\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$O(-I) = \frac{1}{\sin\varphi}, \quad (-I)(-II) = \frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

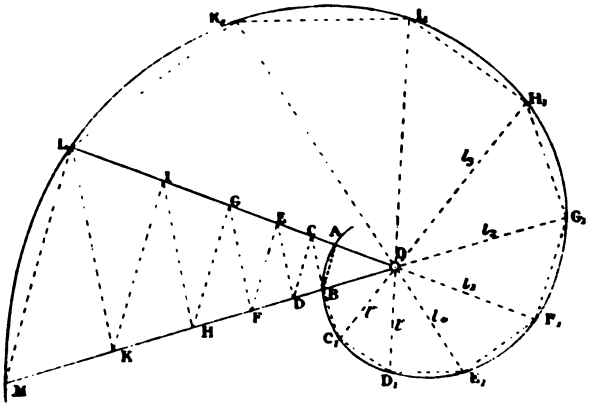
Pour déterminer les puissances successives de la tangente et de la cotangente, on fait OE = 1 (*fig.* 29), et, en se conformant à la construction déjà indiquée (34), on a

$$OA = \tang\varphi, \qquad O2 = \tang^2\varphi, \qquad O3 = \tang^3\varphi;$$
$$\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$O(-1) = \cot\varphi, \qquad O(-2) = \cot^2\varphi.$$

II. — Extraction des racines. Spirale équiangle.

39. Extraire la racine $n^{\text{ième}}$ du rapport entre deux segments

Fig. 30.



donnés, k et l, c'est déterminer un nouveau rapport $\frac{a}{b}$, tel qu'on ait

$$k = l\left(\frac{a}{b}\right)^n;$$

n est d'ailleurs supposé entier et positif.

En dehors de certains cas particuliers, directement solubles par la règle et le compas, on doit, pour effectuer graphiquement cette opération, recourir à des courbes auxiliaires.

Sur les côtés OL et OM (*fig.* 30) d'un angle pris arbitrairement, on construit les puissances successives d'une droite, au moyen de la ligne brisée ABCD ... KLM, composée de transversales

parallèles et antiparallèles. Les segments

$$OA = OA,$$
$$OB = OA\left(\frac{OB}{OA}\right),$$
$$OC = OA\left(\frac{OB}{OA}\right)^2,$$
$$OD = OA\left(\frac{OB}{OA}\right)^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

ainsi déterminés forment une progression géométrique dont la raison est $\frac{OB}{OA}$.

A côté du triangle AOB on construit le triangle $BOC_1 = BOC$, à côté de BOC_1 le triangle $C_1OD_1 = COD$, puis le triangle $D_1OE_1 = DOE$, et ainsi de suite. Les côtés AB, BC_1, C_1D_1, D_1E_1, ..., respectivement égaux aux transversales parallèles et antiparallèles AB, BC, CD, DE, ..., forment une ligne polygonale ouverte $ABC_1D_1E_1\dots$, dont un côté LM coïncide avec l'une des transversales de l'angle LOM lorsque le rapport de cet angle à quatre angles droits est un nombre pair.

Tous les triangles qui ont le point O pour sommet et un côté de la ligne polygonale pour base sont semblables. Les figures que l'on obtient en réunissant un certain nombre de ces triangles consécutifs sont aussi semblables, comme composées de triangles semblables et semblablement placés. Donc, tous les angles $\widehat{LMO}$, $\widehat{K_1LO}$, $\widehat{I_1K_1O}$, ..., $\widehat{F_1G_1O}$, ... sont égaux; les angles $\widehat{K_1MO}$, $\widehat{I_1LO}$, $\widehat{H_1K_1O}$, ..., $\widehat{E_1G_1O}$, ... sont aussi égaux ; et il en est de même des angles $\widehat{I_1MO}$, $\widehat{H_1LO}$, $\widehat{G_1K_1O}$, ..., $\widehat{D_1G_1O}$, ... En général, tous les triangles ayant pour sommet commun le point O et pour bases les cordes qui sous-tendent un même nombre de côtés du contour polygonal sont semblables, et les angles au centre sous-tendus par les mêmes cordes sont égaux.

Ces propriétés sont indépendantes de la grandeur arbitrairement assignée à l'angle LOM dans la construction du premier triangle élémentaire. Elles ne cessent donc pas d'exister si l'on suppose

l'angle LOM infiniment petit. La ligne polygonale se transforme alors en une courbe spirale continue, dont les tangentes successives sont les bases infiniment petites des triangles élémentaires. Mais ces triangles restent semblables entre eux et leurs angles homologues à la base restent par conséquent égaux. Donc :

Toutes les tangentes à la courbe spirale limite de la ligne polygonale rencontrent sous des angles égaux les rayons vecteurs menés du pôle aux points de contact.

Cette propriété a fait donner à la courbe le nom de *spirale équiangle*. On la nomme aussi *spirale logarithmique*, à raison d'une autre propriété dont il sera question plus loin ([1]).

Si l'on mène, dans une spirale équiangle, les rayons vecteurs OA, OB, OC_1, OD_1, ... qui se succèdent avec un même écartement angulaire quelconque, les triangles OAB, OBC_1, OC_1D_1, ... seront semblables; conséquemment, les rayons vecteurs OA, OB, OC_1, OD_1, ... formeront une progression géométrique, ce qui revient à dire que le contour polygonal ABC_1D_1 ..., inscrit dans

---

([1]) On trouve les premières notions sur cette courbe dans la *Mécanique* de DESCARTES et dans une Lettre de ce savant, écrite en 1638 (t. I, n° 73). DESCARTES remarque, à propos des plans inclinés, que les directions des graves concourent toutes en un point situé à distance finie; que, par suite, si le plan incliné est un plan véritable, les angles qu'il forme avec ces directions concourantes n'étant pas égaux entre eux, les charges ou actions relatives aux divers points du plan ne seront pas non plus égales entre elles. Il faudrait alors, suivant l'expression de DESCARTES, qu'on imaginât, au lieu d'un plan, une portion de spirale ayant son pôle au centre de la Terre. Le P. MERSENNE ayant demandé des explications sur la nature de cette courbe, DESCARTES lui répondit (Lettre 74) qu'une de ses propriétés caractéristiques était que les tangentes en tous ses points formassent des angles égaux avec les droites menées de son centre aux points de contact. (Voir MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, 2e édit., t. II, p. 45-46; Paris, 1799.) La spirale équiangle a été plus tard l'objet d'une étude toute spéciale de la part du jésuite NICOLAS. (Voir ses deux Mémoires intitulés *De novis spiralibus exercitatio geometrica*; Tolosæ, 1693, et *De lineis spiralibus logarithmicis*; Tolosæ, 1692.)

On trouve aussi des matériaux pour l'étude de cette courbe dans WALLIS (*Opera mathematica*, t. I, p. 260) et dans BARROW (*Lect. geometricæ*, p. 124). Voir KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, t. IV, p. 439. Mais c'est à JACQUES BERNOULLI que revient le mérite d'avoir fait connaître les principales propriétés de la spirale. (Voir *Acta Eruditorum*, 1692, 1693.) Conformément au désir exprimé par BERNOULLI mourant (*Acta Eruditorum*, 1692, p. 212), la spirale fut tracée sur son tombeau avec cette épitaphe : *Eadem numero mutata resurget*. (Voir CANTOR, *Allgemeine deutsche Biographie*, t. II, p. 472. — KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, t. IV, p. 440.)

la spirale, sera précisément celui que l'on construirait, d'après la règle sus-indiquée, en partant du triangle élémentaire OAB. Il s'ensuit que, si deux points, A et B, sont pris arbitrairement sur une spirale équiangle dont le pôle est en O, le contour polygonal $ABC_1D_1 \ldots$, construit en partant de ces points, aura tous ses sommets sur la même spirale. Donc :

La spirale équiangle est déterminée quand on connaît son pôle et deux quelconques de ses points.

III. — Propriétés de la spirale.

40. Désignons, dans le système des coordonnées polaires, par r le rayon vecteur qui joint le pôle O à un point de la spirale, et par ω l'angle compris entre ce rayon et l'axe polaire. On sait (**36**) qu'à des valeurs de ω croissant en progression arithmétique correspondent des valeurs de r croissant en progression géométrique. L'équation de la spirale en coordonnées polaires est donc

$$\omega = \log r$$

ou

$$r = b^{\omega},$$

si l'on désigne la base du système logarithmique par b.

Attribuons à ω des valeurs successives telles que chacune diffère de la précédente d'un angle constant α, et représentons par c le rayon vecteur qui fait avec l'axe polaire un premier angle égal à α. Nous aurons :

Pour	$\omega = 0$	$r = 1$
»	$\omega = \alpha$	$r = c$
»	$\omega = 2\alpha$	$r = c^2$
»	$\omega = 3\alpha$	$r = c^3$
.....	.....	.....

On voit par là que l'axe polaire est rencontré par la courbe à l'unité de distance du pôle, et que la progression géométrique formée par les rayons vecteurs qui se succèdent avec le même écartement angulaire α a pour raison le rayon vecteur c, qui fait avec l'axe polaire un angle égal à α.

En attribuant à ω une suite de valeurs négatives, dont deux consécutives diffèrent aussi entre elles de l'angle α, on détermine des rayons vecteurs plus petits que l'unité et décroissant suivant la même progression géométrique, qui a pour expression générale

$$\ldots, \frac{1}{c^3}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{c}, 1, c, c^2, c^3, \ldots.$$

Les propriétés de la spirale équiangle sont indépendantes non seulement de l'angle α, mais encore du rayon c, qui est la seconde des deux quantités servant à construire le contour polygonal dont les côtés sous-tendent des angles égaux à α. Pour chaque nouvelle valeur attribuée à c on obtiendra une nouvelle spirale équiangle, caractérisée par une autre constante. On déterminera cette courbe, soit au moyen d'une construction, en se fondant sur ce que sa développée est une autre spirale équiangle, soit par le calcul. On obtiendra, par exemple, au moyen des logarithmes de Briggs, une spirale de progression rapide, dans laquelle on aura :

Pour	$\omega = -45^\circ$	$r = 0,1639$
»	$\omega = -5^\circ$	$r = 0,8180$
»	$\omega = 0^\circ$	$r = 1,0000$
»	$\omega = +5^\circ$	$r = 1,2220$
»	$\omega = +45^\circ$	$r = 6,0090$
»	$\omega = +90^\circ$	$r = 37,2100$

IV. — Construction de la spirale.

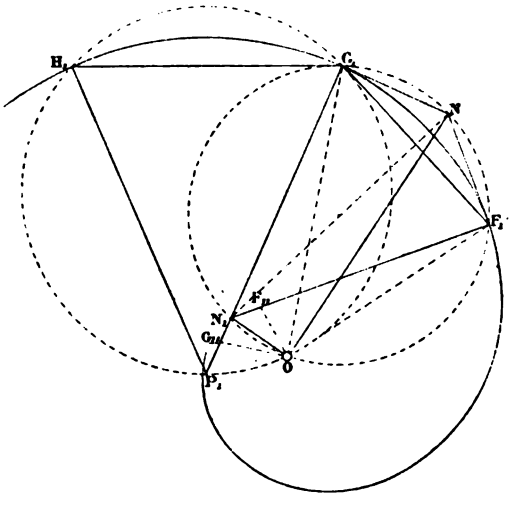
41. Les divers procédés de construction purement graphique de la spirale équiangle reposent sur quelques propriétés de cette courbe, que nous devons d'abord établir.

La développée d'une spirale équiangle est une autre spirale équiangle de même progression.

Soient F_{11}, G_{11}, ... (*fig.* 31) les centres de courbure qui correspondent respectivement aux points F_1, G_1, ... de la spirale. Toutes les parties de la courbe étant, comme on l'a vu précédemment, semblables entre elles, les triangles tels que F_1OF_{11},

$G_1 O G_{11}, \ldots$, formés par le pôle O, par les points F_1, $G_1, \ldots$ de la courbe, et par les centres de courbure correspondants $F_{11}, G_{11}, \ldots$, sont eux-mêmes semblables. Il s'ensuit que les droites OF_{11}, $OG_{11}, \ldots$ sont proportionnelles aux rayons vecteurs OF_1, $OG_1, \ldots$ et comprennent entre elles les mêmes angles que ces rayons; en d'autres

Fig. 31.



termes, les droites OF_{11}, $OG_{11}, \ldots$ sont les rayons vecteurs d'une nouvelle spirale équiangle $F_{11}G_{11}\ldots$, semblable à la spirale donnée, avec laquelle elle coïnciderait si on la faisait pivoter d'une quantité convenable autour du point O.

Cette nouvelle spirale est dite *la développée* (¹) de la première.

42. *Deux points quelconques* F_1, G_1 *d'une spirale équiangle, le pôle* O *de la courbe, l'intersection* N *des tangentes aux deux points considérés et l'intersection* N_1 *des normales aux mêmes*

(¹) La théorie des *développées* se trouve en germe dans le cinquième Livre des *Sections coniques* d'Apollonius. C'est ce même Livre qui a donné lieu à la célèbre restitution de Vincenzo Viviani. Voir *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum;* Florentiæ, MDCLIX. — *Apollonii Pergaei conicorum lib. V, VI, VII paraphraste Abalphato Asphahanensi nunc primum editi,* etc.; Florentiæ, MDCLXI.

points, sont cinq points situés sur une même circonférence, dont NN_1 *est un diamètre.*

En effet, d'une part, les angles $\widehat{NF_1N_1}$ et $\widehat{NG_1N_1}$ étant droits, la circonférence circonscrite au triangle F_1NG_1 a pour diamètre NN_1; d'autre part, la spirale étant équiangle et les angles $\widehat{OF_1N}$, $\widehat{OG_1N}$ étant par conséquent supplémentaires, le point O appartient aussi à la circonférence F_1NG_1. L'angle $\widehat{NON_1}$ est donc droit.

Cette propriété ne cesse pas d'exister lorsque le point G_1, se déplaçant sur la courbe, arrive à ne plus être séparé du point F_1, supposé fixe, que par une distance infiniment petite. Le point N est alors lui-même infiniment voisin de G_1, et le point N_1 d'intersection de la normale F_1N_1 et d'une normale infiniment voisine est à une distance infiniment petite du point F_{11}, centre de courbure relatif à F_1. Donc le rayon de courbure F_1F_{11}, limite de NN_1, est le diamètre d'une circonférence passant par le point O, et, en général :

Les rayons de courbure d'une spirale équiangle sont projetés du centre de la courbe sous des angles droits.

Cette propriété permet de construire la développée d'une spirale donnée. On voit, en effet, que le point G_{11} de la développée, correspondant à un point quelconque G_1 de la courbe, est à l'intersection du rayon OG_{11}, perpendiculaire à OG_1, et de la normale G_1G_{11}, qui fait avec OG_1 un angle complémentaire de l'angle constant $\widehat{OG_1N}$, sous lequel les tangentes à la spirale rencontrent les rayons vecteurs des points de contact.

43. On donne souvent, au lieu de la tangente et de son point de contact, deux points F_1, G_1 de la spirale, assez rapprochés l'un de l'autre pour que l'arc F_1G_1 puisse être remplacé par un arc de cercle. Cet arc de cercle a pour centre le point N_1, situé (**42**) sur la circonférence G_1OF_1, à l'extrémité du diamètre perpendiculaire à la corde F_1G_1. Le centre P_1 d'un second arc G_1H_1 sera déterminé de la même manière par l'intersection de la circonférence H_1OG_1 et du diamètre perpendiculaire à la corde G_1H_1. Les points P_1, G_1, N_1 seront alors en ligne droite si les

portions de spirale F_1G_1 et G_1H_1 peuvent être remplacées par les arcs de cercle.

Un premier centre N_1 ayant été exactement déterminé par la construction précédente, on obtiendra très simplement un centre voisin P_1, soit en construisant le triangle G_1OP_1 semblable au triangle F_1ON_1, soit en coupant G_1N_1 par la perpendiculaire élevée au milieu de G_1H_1. On déterminera de la même manière toute la suite des points analogues à N_1, P_1, ..., et de ces points comme centres on décrira les arcs de cercles F_1G_1, G_1H_1, ... La spirale se trouvera ainsi tracée.

44. Il est plus facile encore de construire la spirale équiangle qui coïncide avec sa propre développée.

Ayant d'abord construit la portion de spirale qui correspond à l'angle $\frac{3\pi}{2}$, on la considère comme développée de la portion suivante, et l'on trace cette seconde portion, d'après la méthode indiquée plus haut, au moyen d'arcs de cercles dont les centres sont pris sur la première portion déjà construite; et ainsi de suite. La normale et les rayons de courbure sont en même temps tangents à la courbe qui coupe les rayons vecteurs sous un angle de $74°79'18''53$. La tangente de cet angle, c'est-à-dire le rapport des rayons vecteurs, est

$$3,6441734.$$

Ce nombre a pour valeurs approchées

$$\frac{215}{59},\quad \frac{379}{104},\quad \frac{973}{267}.$$

On peut décrire la courbe sans autre donnée que ce rapport.

On peut aussi calculer autant de rayons vecteurs qu'on voudra au moyen de la formule

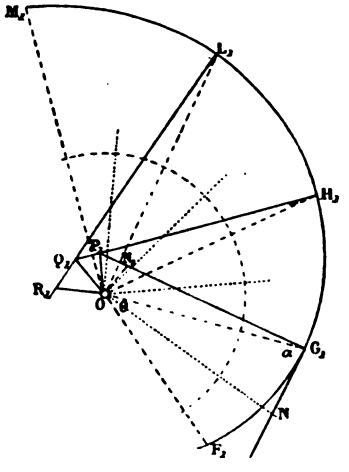
$$\log\frac{r}{c} = 0,0000346060 3\,\Theta' = 0,002079996 2\,\Theta^\circ,$$

dans laquelle Θ' et Θ° représentent, le premier en minutes, le second en degrés, l'angle formé par les rayons vecteurs r et c.

45. Lorsque, dans une spirale qui est sa propre développée et qui a pour angle de rotation $\beta = 2k\pi$, on donne l'angle constant α compris entre la courbe et le rayon vecteur, on peut obtenir autant de points qu'on veut de la courbe et raccorder ensuite ces points par des arcs de cercle.

On divise l'espace angulaire autour du point O (*fig.* 32) en un certain nombre de parties égales θ, assez petites pour que l'arc de spirale correspondant à chacune d'elles puisse être remplacé par un arc de cercle. Par un point G_1, pris sur l'un des rayons diviseurs, on mène la droite G_1N, faisant avec ce rayon l'angle $\widehat{OG_1N}$, égal à l'angle donné α. On considère le point F_1, non encore construit, comme situé sur le rayon qui précède OG_1 et qui fait avec OG_1 l'angle θ. L'angle $\widehat{NON_1}$ étant droit (**42**), on construit le point N_1 comme intersection du rayon perpendiculaire à la bissectrice ON de l'angle $\widehat{F_1OG_1}$ et de la perpendiculaire élevée en G_1 sur la droite G_1N. Du centre N_1, avec N_1G_1 pour rayon, on décrit l'arc G_1F_1, qui détermine le point F_1. Le centre P_1 du second arc de cercle G_1H_1 est ensuite obtenu comme intersection de la droite G_1N_1 et du rayon perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{G_1OH_1} = \theta$, qui vient immédiatement après l'angle $\widehat{F_1OG_1}$. Du centre P_1, avec P_1G_1 pour rayon, on décrit ce second arc de cercle, qui détermine le point H_1. Le centre Q_1 du troisième arc est pareillement à l'intersection de la droite H_1P_1 et du rayon perpendiculaire à la bissectrice du troisième angle θ, et ainsi de suite.

Fig. 32.



Si l'on divisait l'espace angulaire autour du point O en 2^{n+1} parties égales et si l'on faisait l'angle θ égal à $360^\circ : 2^n$, les rayons diviseurs fourniraient non seulement tous les rayons vecteurs qui

interviennent dans la construction, mais encore les bissectrices des angles successifs et les droites, perpendiculaires à ces bissectrices, sur lesquelles sont situés les centres des arcs cherchés.

46. Les précédentes solutions exigent qu'on sache diviser un angle donné en un certain nombre de parties égales ou de parties proportionnelles à des segments de droites donnés. Cette question, qui se rattache directement au calcul graphique, peut être résolue au moyen d'une progression arithmétique mise sous forme de spirale. On peut, à la vérité, effectuer les divisions dont il s'agit sur l'arc de cercle, qui est la grandeur linéaire servant de mesure aux angles plans ; mais les divisions de l'arc de cercle ne sont pas toujours possibles par la règle et le compas. Aussi sera-t-il plus simple et plus général de se servir de la spirale, au moyen de laquelle on ramène la mesure des mêmes angles à celle de la grandeur linéaire qui constitue la différence des rayons vecteurs comprenant entre eux l'angle donné.

Transformons la progression arithmétique par un procédé analogue à celui qui nous a amenés de la progression géométrique à la spirale précédemment considérée. Nous obtiendrons ainsi un second contour polygonal tel, que les rayons vecteurs aboutissant à ses sommets successifs, ou comprenant entre eux un même nombre de ses côtés, excéderont chacun le rayon précédent d'une quantité constante. A la limite, le contour polygonal deviendra une seconde spirale, dans laquelle une suite quelconque de rayons vecteurs, séparés par des intervalles angulaires égaux, présenteront des longueurs relatives procédant entre elles par équidifférences. On donne à la courbe ainsi obtenue le nom de *spirale d'Archimède.*

Au moyen de cette courbe, tous les problèmes dans lesquels il s'agit de modifier un angle par voie d'addition ou de soustraction n'exigeront plus que des additions ou des soustractions linéaires.

Soit à diviser un angle donné en n parties proportionnelles à des droites données. On tracera deux rayons vecteurs de la spirale par différence, faisant entre eux l'angle donné ; on divisera l'excès du grand rayon sur le petit en n parties proportionnelles aux mêmes grandeurs. Les distances mesurées sur le plus grand rayon, entre l'origine et les $n - 1$ points de division, seront les longueurs des

$n - 1$ rayons vecteurs à insérer entre les deux premiers pour obtenir la division cherchée.

La spirale d'Archimède devient ainsi le complément de la spirale équiangle, et, si l'on trace ces deux courbes de même pôle de telle façon que le zéro de l'une corresponde à l'unité de l'autre, elles formeront un ensemble au moyen duquel les opérations fondamentales du calcul graphique seront ramenées, savoir : la multiplication à une addition, la division à une soustraction, l'élévation aux puissances à une multiplication (addition multiple) et l'extraction des racines à une division (soustraction multiple) [1].

V. — Applications.

47. La spirale équiangle sert à résoudre le problème de l'extraction des racines. Il résulte en effet de sa construction que les

---

[1] *Voir*, au sujet de la spirale d'Archimède et d'un instrument imaginé pour la construire, deux Notes de M. le professeur Sayno, dans les *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, t. VII, 1874, p. 163-168 et 499-504. C'est d'ailleurs à tort qu'on a souvent attribué l'invention de cette courbe au savant dont elle a gardé le nom. Archimède a laissé d'importants travaux sur la spirale, mais Platon, dans un passage du *Timée*, en avait déjà fait l'application aux orbites planétaires, et, pour en trouver les premières origines, il faut remonter jusqu'à la Géométrie des Hindous. Vers la fin du IIIe siècle avant Jésus-Christ, la spirale fut attribuée à Conon, contemporain d'Archimède. *Voir* Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, t. IV, p. 411-412. — Lehmann, *Die Archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte*; Freiburg, 1862. — L.-Am. Sedillot, *Sur l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon*; Rome, 1873, p. 10-11. — Chasles, *Aperçu historique*, etc., Note I, p. 272, sur la confusion établie par de Challes, Vossius et Heilbronner entre les *spiriques* de Perseus et les spirales d'Archimède, et Note VIII, p. 297, sur la *description des spirales et des quadratrices au moyen d'une surface héliçoïde rampante*, et sur l'*analogie de ces courbes avec celles qui portent le même nom dans le système des coordonnées de Descartes*.

Parmi les mathématiciens qui ont particulièrement étudié la spirale d'Archimède avant l'invention du Calcul infinitésimal, il convient de citer Viète (Montferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques*, 2e édition, t. II, p. 512), Wallis (*Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturarum*, etc.; Oxoniæ, 1655, prop. V-XLV), Bouillau (*De lineis spiralibus demonstrationes novæ*; Parisiis, 1657, feuillet aiij).

Nous signalerons enfin comme remontant à une époque très ancienne l'emploi de la spirale pour diviser géométriquement dans un rapport donné les angles et les arcs de cercle. *Voir*, en effet, *Mathematicæ Collectiones Pappi Alexandrini a* Federico Commandino *in latinum conversæ et commentariis illustratæ*; Bononiæ, 1660, t. IV, prop. XXXV.

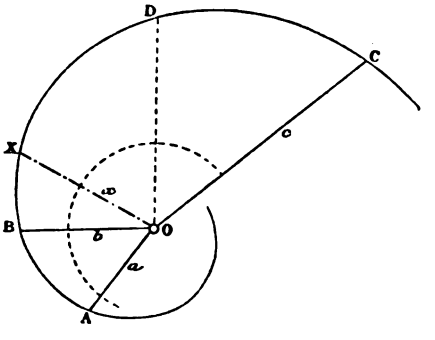
cordes sous-tendant un même nombre de triangles élémentaires consécutifs sont vues du centre O sous des angles égaux, que tous les triangles ayant le point O pour sommet et ces cordes pour bases sont semblables, et que les rayons vecteurs se succédant à intervalles angulaires égaux forment une progression géométrique, c'est-à-dire que les côtés d'un angle constant sont entre eux dans un rapport constant. Dès lors, si l'on mène les rayons vecteurs respectivement égaux à deux longueurs données l et $l\left(\frac{a}{b}\right)^n$, et si l'on divise l'angle compris entre ces rayons en n parties égales, les rayons vecteurs qui limitent l'une des $n^{\text{ièmes}}$ parties de cet angle sont entre eux dans le rapport $\frac{a}{b}$, qui est la racine $n^{\text{ième}}$ du rapport des deux longueurs proposées (39).

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de calculer la quantité $x = \sqrt[3]{abc}$. Le problème revient à déterminer le côté x du cube ayant même volume que le parallélépipède dont les trois hauteurs sont a, b, c. Posons

$$\frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{a}{l}\,\frac{b}{l}\,\frac{c}{l}},$$

l représentant le rayon de l'origine pris pour unité. Déterminons les rayons qui correspondent aux longueurs a, b, c, et faisons la somme des trois angles $\widehat{al}$, $\widehat{bl}$, $\widehat{cl}$, en ayant égard à leurs sens. La quantité x cherchée est représentée par le rayon qui forme avec l un angle égal au tiers de cette somme.

Fig. 33.



La construction se simplifie quand on prend pour valeur de l l'une des trois hauteurs données. On a, dans ce cas,

$$\frac{x}{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}\,\frac{c}{b}}.$$

Supposons $c > b > a$, et soient OA, OB, OC (*fig.* 33) les rayons vecteurs de la spirale dont les longueurs sont respectivement a, b, c. Les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ seront déterminés par les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, et le rapport $\frac{a}{b} : \frac{b}{c} = \frac{x^3}{b^3}$ par la différence $\widehat{AOB} - \widehat{BOC}$, soit, en faisant $\widehat{DOC} = \widehat{AOB}$, par l'angle $\widehat{DOB}$. Si donc on forme l'angle $XOB = \frac{1}{3}\widehat{DOB}$, on aura $OX = x$.

On voit que les angles de la spirale équiangle ou *logarithmique* remplissent dans le calcul graphique le même office que les logarithmes dans le calcul ordinaire.

On ajoute les angles ou on les retranche, selon qu'il s'agit de multiplier ou de diviser les rapports de leurs côtés. On multiplie un angle par n ou on le divise en n parties égales selon qu'on veut avoir la $n^{\text{ième}}$ puissance ou la racine $n^{\text{ième}}$ du rapport de ses côtés.

VI. — Substitution de la spirale aux Tables de logarithmes.

48. Nous avons vu (**40**) que, dans la spirale logarithmique, l'angle compris entre un rayon vecteur quelconque et l'axe fixe a une valeur égale au logarithme du rayon considéré. Cette courbe peut donc remplacer les Tables de logarithmes et servir non seulement pour l'élévation aux puissances et pour l'extraction des racines, mais encore pour la multiplication et pour la division graphiques.

Soient $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ des grandeurs à multiplier ou à diviser, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ les angles qui correspondent à ces grandeurs considérées comme rayons vecteurs d'une spirale logarithmique, R le résultat cherché, produit ou quotient, Ω l'angle compris entre la grandeur R considérée comme rayon vecteur de la même courbe et l'axe fixe.

On a, s'il s'agit d'une multiplication,

$$R = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n$$

et

$$\log(r_1 r_2 r_3 \ldots r_n) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_n = \Omega.$$

L'angle Ω est le logarithme du produit cherché et correspond au rayon R qui représente ce produit.

S'il s'agit de déterminer le quotient

$$R = \frac{r_1}{r_2},$$

on a

$$\log r_1 - \log r_2 = \omega_1 - \omega_2 = \Omega,$$

et le rayon R correspondant à l'angle Ω représente le quotient.

Avant de fixer sur la figure la position de l'angle Ω, on vérifie si le résultat cherché R doit être plus grand ou plus petit que la grandeur prise pour unité. Selon que l'un ou l'autre cas se réalise, on porte l'angle Ω, à partir de l'axe fixe, dans le sens des rayons croissants de la spirale ou dans le sens opposé.

S'il s'agit de trouver le produit R d'une suite de rapports $\frac{r_1}{r_2}$, $\frac{r_3}{r_4}$, $\frac{r_5}{r_6}$, ..., on détermine les angles $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$, qui correspondent respectivement aux rapports simples, et le rayon vecteur correspondant à la somme de ces angles donne la valeur du produit cherché.

L'expression

$$R = r_1^{\frac{m_1}{n_1}} r_2^{\frac{m_2}{n_2}} r_3^{\frac{m_3}{n_3}} \ldots,$$

dans laquelle m et n sont des valeurs quelconques, positives ou négatives, comprend dans sa généralité l'ensemble des questions qui peuvent être résolues au moyen de la spirale. Toutes les valeurs r étant portées comme rayons vecteurs de la courbe et les valeurs des angles correspondants ω étant respectivement affectées des mêmes indices, l'angle Ω qui correspond à R sera déterminé par l'équation

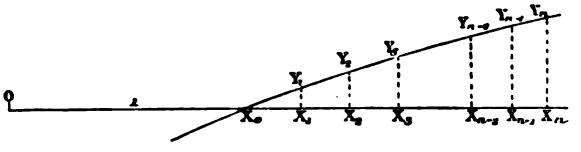
$$\Omega = \frac{m_1}{n_1}\omega_1 + \frac{m_2}{n_2}\omega_2 + \frac{m_3}{n_3}\omega_3 + \ldots.$$

En résumé, la spirale logarithmique permet d'effectuer très simplement et par voie graphique la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, l'extraction des racines, et le rôle de cette courbe dans le calcul graphique peut être comparé à celui des Tables de logarithmes dans les calculs numériques ordinaires.

VII. — Courbes logarithmiques.

49. On porte sur une droite OX (*fig.* 34) des longueurs OX_0, OX_1, OX_2, ..., OX_n représentant, à une échelle quelconque, une suite de nombres; aux points X_0, X_1, X_2, ..., X_n, on élève des perpendiculaires représentant, à la même échelle, les logarithmes de ces

Fig. 34.



nombres; on raccorde ensuite les extémités des perpendiculaires par une courbe continue. Cette courbe peut faire l'office d'une Table de logarithmes, dont elle est la traduction graphique.

Pour obtenir le produit de n segments $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, il suffira de les porter sur OX à partir du point O, d'additionner les ordonnées correspondantes $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ et de chercher la longueur d'abscisse OX qui correspond à l'ordonnée

$$u = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n.$$

S'il s'agit d'élever x_1 à la $n^{\text{ième}}$ puissance, on portera sur OX une longueur égale à x_1, on prendra l'ordonnée correspondante y_1 et l'on cherchera l'abscisse relative à l'ordonnée ny_1.

S'il s'agit, au contraire, d'extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de x_1, on cherchera l'abscisse qui correspond à l'ordonnée $\frac{y_1}{n}$ (¹).

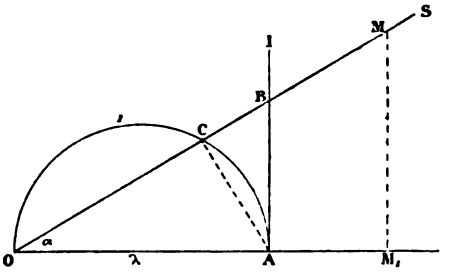
(¹) M. J. de la Gournerie a indiqué, dans son *Traité de Géométrie descriptive* (Paris, 1860, p. 197, *fig.* 451), une courbe propre à remplacer la table des logarithmes vulgaires, pour les nombres compris entre 1 et 10. Les abscisses sont les logarithmes des nombres représentés par les ordonnées. Ces longueurs sont respectivement mesurées aux échelles de $0^m,05$ et de $0^m,005$ pour 1^m. Quand un nombre est dans les limites des ordonnées, la courbe fournit immédiatement son logarithme. Quand le nombre donné est plus grand que 10 ou plus petit que 1, on le divise ou on le multiplie par la puissance de 10 qui permet d'obtenir, à la caractéristique près, son logarithme à l'aide de la courbe.

VIII. — Courbes potentielles.

50. On arrive au même résultat par l'emploi de courbes spéciales, que nous appellerons *potentielles*. Ces courbes, faciles à construire, fournissent, par de simples arcs de cercles, toute grandeur radicale de la forme $\sqrt[n]{a^m}$, dans laquelle m et n représentent des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Construisons en effet (*fig.* 35) un demi-cercle sur la longueur $OA = \lambda$, prise pour unité. Élevons au point A, sur λ, la perpendiculaire AI, et menons du point O, sous un angle quelconque α, une sécante OS. Le segment OC de cette droite compris dans le demi-cercle représente la valeur réciproque du segment OB compris entre l'origine O et l'intersection de OS et de AI; OB représente de même la valeur réciproque de OC. Les triangles semblables OAB, OCA fournissent en effet les relations

Fig. 35.



$$\lambda : OB = OC : \lambda,$$

$$(\alpha) \qquad \frac{OB}{\lambda}\,\frac{OC}{\lambda} = 1$$

et, puisque $\lambda = 1$,

$$(\beta) \qquad OB.OC = 1,$$

en sorte que, si l'on avait, par exemple, $OB = 2$, on aurait en même temps $OC = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour obtenir la valeur réciproque d'une longueur donnée OB, que nous supposerons d'abord plus grande que l'unité, il suffira de décrire un demi-cercle sur le diamètre $OA = 1$, d'élever une perpendiculaire à l'extrémité A de ce diamètre, de couper cette perpendiculaire par un arc de cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à OB, et de joindre le point O à

l'intersection par une droite. La partie de cette droite comprise dans le demi-cercle sera la valeur réciproque cherchée.

On modifie légèrement la construction lorsque le segment donné OB est plus petit que l'unité. On trace, dans ce cas, du point O comme centre, avec la longueur donnée pour rayon, un arc de cercle qui coupe le demi-cercle OA en un point C; on joint OC, et l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en B avec la perpendiculaire élevée à l'extrémité A de OA. Le segment OB est la valeur réciproque cherchée.

Représentons OB par l et proposons-nous de déterminer, d'après ce qui vient d'être dit, les puissances $l^2, l^3, l^4, l^5, \ldots, l^{-2}, l^{-3}, l^{-4}, l^{-5}, \ldots$.

D'un point M quelconque, pris sur OS, on abaisse la perpendiculaire MM_1 sur λ. On a

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OB}{OA} = \frac{l}{1},$$

d'où l'on déduit

$$(\gamma) \qquad OM = OM_1 l^{+1},$$

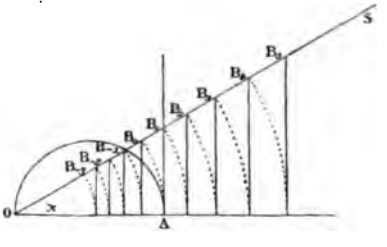
$$(\delta) \qquad OM_1 = OM\, l^{-1}.$$

L'équation (γ) sert à trouver la puissance l^{m+1} quand on connaît la puissance l^m. Par exemple, si OM_1 est la puissance $m^{\text{ième}}$ de l, cette équation donne

$$OM = l^m l^{+1} = l^{m+1}.$$

Mais on a, par la figure, $OB = l$, c'est-à-dire la première puissance de l. Si donc on pose $OM_1 = l$, on aura $OM = l^2$; si l'on pose $OM_1 = l^2$, on aura $OM = l^3$, et ainsi de suite.

Fig. 36.



L'équation (δ) sert au contraire à déterminer l^{m-1} quand on connaît l^m.

Si l'on prend, en effet, OM comme $m^{\text{ième}}$ puissance de l, l'équation (δ) donnera

$$OM_1 = l^m l^{-1} = l^{m-1},$$

et ainsi de suite.

La *fig.* 36 présente la suite des puissances de $OB_1 = l$; on a effectivement

$$OB_2 = l^2, \quad OB_3 = l^3, \quad OB_4 = l^4,$$

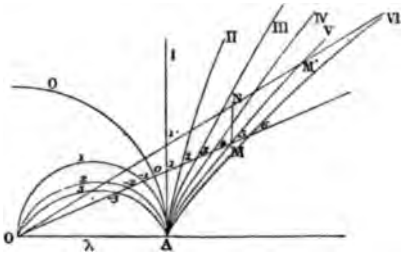
$$OB_0 = OA = l^0 = 1, \quad OB_{-1} = l^{-1}, \quad OB_{-2} = l^{-2}, \quad OB_{-3} = l^{-3}.$$

On donne aux points $\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots$ le nom de *points potentiels*, et l'on a coutume de les représenter simplement par les chiffres $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, de façon qu'ils apparaissent comme fonctions du point potentiel 1.

Cela posé, si la droite OS pivote d'un mouvement continu sur le point O, le point B_1 cheminera sur cette droite, en se rapprochant ou en s'éloignant de O, selon que OS se rapprochera ou s'éloignera de OA. Les autres points potentiels se déplaceront en même temps sur OS et décriront respectivement des courbes qu'on nomme *courbes potentielles*.

Représentons par I, II, III, ... (*fig.* 37) les courbes que décrivent les points 1, 2, 3, ... et par **1**, **2**, **3**, ... celles que décrivent les points -1, -2, -3, ... Il est aisé de reconnaître que les premières sont ouvertes et s'étendent à l'infini, tandis que les autres sont fermées et sous-tendues par l'unité λ. La courbe I est une droite, la courbe **0**, décrite par le point o, est le quart de cercle de rayon $OA = \lambda$, et la courbe **1** est le demi-cercle de diamètre OA.

Fig. 37.



On peut d'ailleurs, au moyen d'un *angle proportionnel*, déterminer les divers points potentiels sans qu'il soit nécessaire de tracer toutes les perpendiculaires correspondantes.

On construit à cet effet un angle tel, que le rayon d'un cercle, tracé de son sommet comme centre, soit à la corde de l'arc compris entre ses côtés dans le rapport de 1 à l. On décrit ensuite, du même sommet comme centre, un cercle de rayon l^m; on mesure la corde s qui sous-tend l'arc de ce nouveau cercle compris entre les côtés de l'angle, et l'on a

$$l^m : s = 1 : l$$

et

$$(\eta) \qquad (x^2+y^2)^{n-1} = x^{2n}.$$

Mais cette dernière forme est moins commode que l'équation (ε) pour les applications que nous aurons à faire.

En différentiant l'équation (ε), on obtient

$$\begin{aligned} d\rho &= n\,\text{séc}^{n-1}\alpha\,.\,d\,\text{séc}\,\alpha = n\,\text{séc}^{n-1}\alpha\,.\,\text{séc}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha\,d\alpha \\ &= n\,\text{séc}^{n}\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha\,.\,d\alpha = n\rho\,\text{tang}\,\alpha\,d\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$(\theta) \qquad \frac{d\rho}{d\alpha} = n\rho.\,\text{tang}\,\alpha.$$

Élevant OR perpendiculaire sur OB et projetant sur OR la normale MR à la courbe, on a pour équation de la sous-normale

$$(\iota) \qquad \text{OR} = \frac{d\rho}{d\alpha} = n\rho.\,\text{tang}\,\alpha.$$

Élevant ensuite MQ perpendiculaire sur OB, on a

$$\text{MQ} = \text{OM}\,\text{tang}\,\alpha = \rho.\,\text{tang}\,\alpha.$$

Introduisant cette valeur dans l'équation (ι), on a

$$\text{OR} = n.\,\text{MQ}.$$

La similitude des triangles NOR, NQM donne d'ailleurs

$$\text{NO} = n.\,\text{NQ},$$

d'où

$$(\varkappa) \qquad \text{OQ} = (n-1)\,\text{NQ}.$$

En menant CD parallèle à la normale MN, on détermine le triangle OCD, semblable au triangle OMN. La corde CA étant d'ailleurs parallèle à MQ, on a, par la similitude des triangles, une équation analogue à ($\varkappa$), savoir

$$\text{OA} = (n-1)\,\text{AD},$$

d'où

$$(\lambda) \qquad \text{AD} = \frac{1}{n-1}\,\text{OA},$$

équation qui permet de construire la tangente au point M, puisque CD est parallèle à la normale en ce point.

On trace, à partir du point O, un rayon quelconque OS, et l'on obtient le point M en portant sur ce rayon la $n^{\text{ième}}$ puissance OM de OB. On porte ensuite la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie de OA de A en D, on joint CD, et du point M on abaisse sur cette droite une perpendiculaire MT qui est la tangente cherchée.

On donne le nom de *point normal* au point D, qui sert à déterminer la direction de la normale. Pour les courbes I, II, III, IV, ..., qui s'étendent à l'infini, l'équation $AD = \frac{1}{n-1}$ OA et la génération même des courbes indiquent que le point normal est à l'extérieur du segment OA. Pour les courbes potentielles 1, 2, 3, ..., qui ne s'étendent pas à l'infini, n et AD deviennent négatifs, et par le point D, situé sur le diamètre OA, on ne peut pas mener de tangente au demi-cercle OCA. On peut, au contraire, en mener une lorsque le point normal est sur le prolongement de OA. Mais on sait que la normale en un point M de la courbe potentielle est perpendiculaire à la sécante DC, qui joint le point normal correspondant à l'intersection du rayon OM et du demi-cercle OCA. On en conclut que les tangentes à une courbe potentielle qui s'étend à l'infini sont parallèles deux à deux. Il arrive en effet, généralement, que la droite DC coupe le demi-cercle en un second point C_1 et qu'on a sur les rayons OC, OC_1 respectivement deux points M, M_1, appartenant à une même courbe potentielle. La tangente au point M est perpendiculaire à DC; la tangente au point M_1 est perpendiculaire à DC_1. Mais DC et DC_1 coïncident : les deux tangentes sont donc parallèles.

Si les points C et C_1 viennent à coïncider, c'est-à-dire si la droite DC touche le demi-cercle, les deux tangentes coïncident aussi et la courbe passe de la concavité à la convexité ; en d'autres termes, le point de contact M est un point d'inflexion.

On peut d'ailleurs, à raison de leur faible courbure, considérer les courbes potentielles comme composées d'une suite de petits segments rectilignes. En ce cas, le rapport des racines $n^{\text{ièmes}}$ de deux longueurs ρ et ρ_1 est fourni par l'équation (9_1). On a en effet

$$\frac{\rho}{\lambda} = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{\rho_1}{\lambda} = \left(\frac{l_1}{\lambda}\right)^n,$$

d'où

$$\rho : \rho_1 = l^n : l_1^n$$

et

$$\sqrt[n]{\rho} : \sqrt[n]{\rho_1} = l : l_1.$$

Nous avons, dans la *fig.* 37,

$$\mathrm{O1} = l, \quad \mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{O1_1} = l_1, \quad \mathrm{OM_1} = \rho_1,$$

d'où

$$\mathrm{O1} : \mathrm{O1_1} = \sqrt[5]{\mathrm{OM}} : \sqrt[5]{\mathrm{OM_1}}.$$

Si OM est l'unité de longueur adoptée et si l'on mène par le point M une parallèle MN à AI, on a la proportion

$$\mathrm{OM} : \mathrm{ON} = \sqrt[5]{\mathrm{OM}} : \sqrt[5]{\mathrm{OM_1}}$$

ou bien

$$1 : \mathrm{ON} = 1 : \sqrt[5]{\mathrm{OM_1}},$$

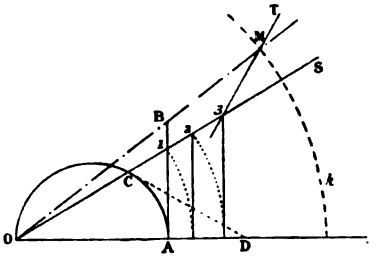
c'est-à-dire

$$\mathrm{ON} = \sqrt[5]{\mathrm{OM_1}}.$$

52. L'extraction des racines au moyen des courbes potentielles ne nécessite pas absolument la construction de ces courbes. On peut, comme nous l'avons déjà indiqué, se borner à construire leurs tangentes.

Cette observation sera mise en évidence par un exemple.

Fig. 39.



Soit l la longueur dont on veut extraire la racine, et supposons qu'il s'agisse de la racine cubique. Du centre O (*fig.* 39), avec la longueur l comme rayon, on décrit un cercle k; on mène arbitrairement un rayon OS, et l'on détermine la troisième puissance de O1. Le point potentiel 3 ainsi obtenu appartient à la courbe potentielle III. On mène par ce point la droite 3T, perpendiculaire à la direction CD des normales et par conséquent tangente à la courbe potentielle III au point 3.

Le point D est donné par l'équation (λ) :

$$AD = \frac{1}{3-1} OA = \frac{1}{2} OA.$$

A raison de sa faible courbure, la courbe diffère peu de sa tangente dans le voisinage du point de contact. Elle coupe donc le cercle k en un point très rapproché du point M, où ce cercle est coupé par 3T, et la droite OM diffère très peu du rayon qui donnerait la mesure exacte de $\sqrt[3]{l}$. Si donc on élève OB à la troisième puissance, on obtiendra un nouveau point potentiel 3, qui sera en général très voisin de M et qui pourra même coïncider avec M.

Si cependant cette première opération ne donnait pas un résultat assez approché, on construirait la tangente passant par le nouveau point potentiel ; l'intersection de cette tangente avec le cercle k fournirait un autre point M qui pourrait, plus exactement que celui de la première tangente 3T, être considéré comme point d'intersection de la courbe potentielle et du cercle k. La construction de la seconde tangente suffira, dans tous les cas, à un opérateur quelque peu exercé, pour obtenir, avec une approximation suffisante, le point d'intersection du cercle et de la courbe.

Dans la *fig.* 39, OB représente $\sqrt[3]{l}$. Si la longueur l était plus petite que l'unité, on déterminerait d'abord la longueur réciproque $l_1 = \frac{1}{l}$ et on extrairait la racine cubique de l_1 ; la valeur réciproque de cette racine serait la racine cherchée.

53. Nous compléterons l'étude des courbes potentielles par la recherche de l'aire du triangle mixtiligne compris entre la base OA, le rayon OS et la courbe. Cette aire, déduite du calcul, est représentée par l'expression

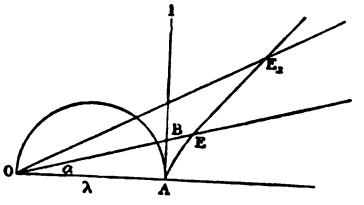
$$\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^{2n}\alpha}.$$

Mais l'aire d'un triangle mixtiligne peut aussi être déterminée par la méthode graphique.

Soit OEE_1 (*fig.* 40) la différentielle de la surface OAE. L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de deux côtés par le sinus

de l'angle qu'ils comprennent. Nous admettons que l'angle compris entre OE et OE_1 est infiniment petit, c'est-à-dire égal à $d\alpha$, et

Fig. 40.



qu'on peut, sans erreur appréciable, considérer $\sin d\alpha$ comme égal à $d\alpha$. On a donc, en représentant par dA l'aire différentielle.

$$dA = \frac{1}{2} OE . OE_1 . d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} OE (OE + dOE) d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \overline{OE}^2 d\alpha + \frac{1}{2} OE . dOE . d\alpha$$

En négligeant le second terme du second membre comme infiniment petit du second ordre, on a

$$dA = \frac{1}{2} \overline{OE}^2 d\alpha .$$

Mais, d'autre part,

$$OE = \overline{OB}'' = \sec^n \alpha = \frac{1}{\cos^n \alpha};$$

conséquemment,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^{2n} \alpha},$$

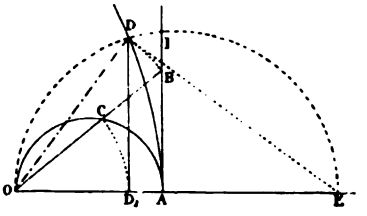
expression déjà obtenue par la méthode analytique.

IX. — Courbe pour l'extraction de la racine cubique.

54. Le calcul graphique fournit le moyen de construire une courbe spéciale pour l'extraction de la racine cubique.

Sur un segment OA, égal à l'unité (*fig.* 41), on décrit un demi-cercle. On élève la perpendiculaire AI sur OA au point A; on mène un rayon quelconque OB; on prend $OD_1 = OC$; on mène D_1D parallèle à AI; du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe D_1D en D. Le point D appartient à la courbe cherchée.

Fig. 41.



Pour le démontrer, on mène DE, perpendiculaire à OD, jusqu'à sa rencontre avec OA au point E. On a

$$\overline{OD}^2 = OD_1 . OE.$$

On sait (50) que $OC . OB = 1$. On a donc

$$OD_1 . OD = 1 \quad \text{ou} \quad OD_1 = \frac{1}{OD},$$

et par suite

$$\overline{OD}^2 = \frac{1}{OD} OE,$$

ou bien

$$\overline{OD}^3 = OE,$$

ou enfin

$$OD = \sqrt[3]{OE}.$$

On déterminera de la même manière autant de points de la courbe qu'on voudra.

Pour extraire la racine cubique d'une longueur donnée l, on porte cette longueur sur OA à partir du point O. Sur $OE = l$, comme diamètre, on décrit un demi-cercle qui coupe la courbe en un point D. On a

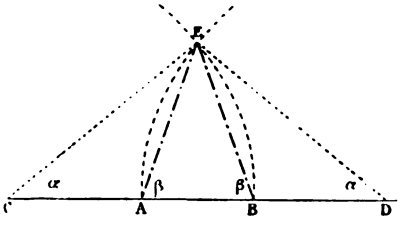
$$OD = \sqrt[3]{OE} = \sqrt[3]{l}.$$

Quand l est plus petit que l'unité, on détermine $x = \sqrt[3]{\frac{1}{l}}$ et l'on déduit $\sqrt[3]{l} = \frac{1}{x}$.

X. — Extraction des racines par la détermination de moyennes proportionnelles.

55. Soit à déterminer la racine carrée x d'un produit ab.

Fig. 42.



On peut effectuer cette opération au moyen de la spirale; mais il est plus simple de recourir au cercle, comme pour la détermination des moyennes proportionnelles.

On prend sur une droite (*fig.* 42) $AB = b$, puis

$$AD = BC = a.$$

Des points C et D comme centres, avec a pour rayon, on trace deux arcs de cercle qui se coupent au point E. On a ainsi

$$AE = BE = x.$$

En effet, les triangles ABE, ADE, BCE, équiangles et par conséquent semblables, donnent la proportion

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{x} = \frac{x}{a},$$

d'où

$$x = \sqrt{ab}.$$

En faisant $b = 1$, on aurait $x = \sqrt{a}$.

On arrive au même résultat par d'autres constructions du même genre.

56. S'il s'agit de construire une expression de la forme

$$x = \sqrt{ab + cd},$$

on pourra déterminer successivement $m = \frac{ab}{h}$, $n = \frac{cd}{h}$ et la moyenne proportionnelle

$$x = \sqrt{h(m + n)}.$$

Mais il vaudra mieux déterminer, de la manière qui vient d'être indiquée, les deux moyennes proportionnelles

$$p = \sqrt{ab}, \quad q = \sqrt{cd},$$

et trouver $x = \sqrt{p^2 + q^2}$ comme hypoténuse d'un triangle rectangle ayant p et q pour côtés de l'angle droit.

57. Supposons enfin qu'on ait à construire une expression de la forme

$$x = \sqrt{\frac{abc}{d} \pm \frac{e^2 f}{g} \pm \frac{h^3 i}{k^2}},$$

dans laquelle tous les termes placés sous le radical sont du second degré :

On posera d'abord

$$\frac{abc}{d} \quad \text{ou} \quad a\frac{bc}{d} = y_1^2,$$

$$\frac{e^2 f}{g} \quad \text{ou} \quad e\frac{ef}{g} = y_2^2,$$

$$\frac{h^3 i}{k^2} \quad \text{ou} \quad h\frac{h}{k}h\frac{i}{k} = y_3^2.$$

On déterminera graphiquement, par les procédés connus,

$$\frac{bc}{d} = p_1, \quad \frac{ef}{g} = p_2, \quad h\frac{h}{k} = p_3, \quad h\frac{i}{k} = p_4,$$

et l'on aura

$$y_1 = \sqrt{ap_1}, \quad y_2 = \sqrt{ep_2}, \quad y_3 = \sqrt{p_3 p_4}.$$

On déterminera ensuite

$$z = \sqrt{y_1^2 \pm y_2^2}$$

et finalement

$$x = \sqrt{z^2 \pm y_3^2} \text{ (1)}.$$

(1) Nous ne croyons pas devoir multiplier davantage les exemples de ces sortes de constructions, qui étaient en grande faveur il y a un demi-siècle. On pourra consulter, pour plus de détails : *Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche in gelehrten Schulen und Bildungs-Anstalten*, von J.-F. Ahrens. Nürnberg, 1831. — *Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Mathematik*, von G.-W. Tenner. Leipzig, 1833. — *Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke*, von Dr H. Glasser. Erlangen, 1851. — Etc.

CHAPITRE III.

INSTRUMENTS AUXILIAIRES POUR LES OPÉRATIONS DE CALCUL.

FULLER, *Telegraphic Computer*. New-York (sans date). — EVERETT, *Universal proportion Table*. London (sans date), published by Longmans, Green and Dyer. — LALANNE, *Description et usage de l'abaque ou compteur universel*. Paris, 1845. — LALANNE, *Mémoire sur les Tables graphiques*, etc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e série, 1846). — Q. SELLA, *Teoria e pratica del regolo calcolatorio*. Torino, Stamperia reale, 1859, traduction française par G. MONTEFIORE LÉVY. Paris, 1869. — BELLAVITIS, *Macchina da calcolare* (*Atti dell' I. R. Istituto veneto*, t. VI, s. III, p. 376-377). Venezia, 1861. — CULMANN, *Die graphische Statik*. Zürich, 1875, nos 6-12. — TETMAYER, *Theorie und Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers*, etc. Zürich, 1875. — HERRMANN, *Das graphische Einmaleins*. Braunschweig, 1875. — STEINER, *Eine praktische Form des Curven-Lineals* (*Wochenschrift des Oest. Ing. u. Arch. Vereins*. März 1876. Wien, p. 132-133). — PEAUCELLIER, *Note sur l'emploi des systèmes articulés à liaison complète, en Géométrie, en Mécanique et dans les sciences appliquées* (*Mémorial de l'Officier du génie*, n° 25. Paris, 1876, p. 369-389).

I. — Généralités.

58. Les opérations graphiques sur les logarithmes ont une très grande importance dans la pratique. Parmi les instruments imaginés pour les faciliter, le plus en usage est la *règle logarithmique* ou *règle à calcul* (1).

(1) Certains auteurs ont voulu voir la première idée de la règle à calcul proprement dite, et même des machines à calculer en général, dans les *bâtons* imaginés par NEPER (1550-1617) et décrits en détail dans sa *Rabdologia* (*Rabdologiæ seu numerationis per virgulas*, etc. Edimburgi, 1617. Traduction italienne de LOCATELLO avec additions; Verona, 1623). Voir aussi : *Rabdologia or the art of numbring*, etc., *first invented by the lord* NAPIER, *baron of Marchiston*, etc., by SETH PARTRIDGE. London, 1648. — *The art of numbring*, etc., *by* W. L., sans doute W. LEYBOURNE. London, 1667. — SCHEFFELT, *Nepperianische Rechenstäblein*. Ulm, 1699. Les bâtons de NEPER (*Nepeirs Bones, lames népériennes, vergettes numératrices*) ne sont en réalité qu'un perfectionnement apporté aux procédés de multiplication précédemment enseignés par PIERRE APIAN (1495-1552) (*Ein newe und wolgegründte*, etc. Durch PETRUM APIANUM. 2e édition de Francfort, 1537), et par d'autres arithméticiens du moyen âge et du

A la vérité, les opérations qu'on effectue à l'aide de la règle ne sont pas graphiques dans le sens strict du mot, car elles ont pour

---

XVIe siècle (PELLOS, *Compendion de lo abaco*. — ORONCE FINÉE, *Arithmetica practica*. — PEVERONE, *Arithmetica practica*. — RAMUS, *Scholæ mathematicæ*. — Voir CHASLES, *Aperçu historique*, etc. Paris, 1875, p. 534, et RUDOLF WOLF, *Geschichte der Astronomie*. München, 1877, p. 353). On en retrouve le principe dans le *suanpan* des Chinois, qui remonte à l'antiquité la plus reculée (DUHALDE, *Ausführliche Beschreibungen des chinesischen Reiches*, etc., übersetzt von MOSHEIM. Rostock, 1747, t. III, p. 350. — LIBRI, *Hist. des Sc. math. en Italie*, t. I, p. 341. — VELSER, *Rerum augustanarum*, etc. Venezia, 1593, p. 268. — LA LOUBÈRE, *Du royaume de Siam*. Paris, 1691. — DU MOLINET, *Cabinet de la Biblioth. de Sainte-Geneviève*. Paris, 1692, p. 23. — HAGER, *An explanation of the elementary characters of the Chinese*. London, 1801.)

SANTINI (*Atti dell' I. R. Ist. veneto*, etc., t. II. Venezia, 1856-57, p. 133) assure que NEPER ne s'en tint pas à ses vergettes et que, aussitôt après avoir découvert les logarithmes, il imagina d'effectuer les opérations arithmétiques au moyen d'échelles graduées. Mais le mérite de cette invention revient à GUNTER (1581-1626) (HENRION, *Logocanon ou règle proportionnelle*, etc. Paris, 1626. — W. LEYBOURNE, *The works of Ed. Gunter*, etc. London, 1673. — MONTUCLA, *Hist. des Math.*, t. II. Paris, an VII, p. 23. — KLÜGEL, *Mathem. Wörterbuch; Die reine Mathem.* Leipzig, 1808, p. 587. — SEDLACZEK, *Ueber Visir- und Recheninstrumente*. Wien, 1856, p. 2. — ROUS, *Instruments et machines à calculer*. Paris, 1868, p. 74.— BENOIT, *La règle à calcul expliquée*. Paris, 1853, p. V-VI. — HEATHER, *A Treatise on mathem. instruments*. London, 1869, p. 25. — RUDOLF WOLF, *Op. cit.*, p. 354. — TICHY, *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln*, etc. Wien, 1878). L'échelle de GUNTER (*Gunter's line, Common Gunter, Navigation scale*) exigeait l'emploi du compas, qui introduisait des chances d'erreur et ralentissait les opérations. WINGATE (1593-1656), à qui la France doit ses premières Tables de logarithmes, supprima le compas et distribua les divisions logarithmiques sur deux règles mobiles juxtaposées (*Construction, description et usage de la règle de proportion;* Paris, 1624. *Arithmétique logarithmique;* Paris, 1626. *Of natural and artificial Arithmetic;* London, 1630. — Voir aussi HEILBRONNER, *Historia Matheseos*, etc., *a mundo condito ad sæc.*, P. C. N. XVI. Lipsiæ, 1742, p. 810). Vers la même époque, OUGHTRED (1574-1660) traça les divisions logarithmiques sur deux cercles concentriques munis de deux indices mobiles (*Circle of proportion*, etc. London, 1632; Oxford, 1660. — *Description and use of the double horizontal dial*. London, 1636; Oxford, 1652.) En 1650, MILBURNE remplaça les formes rectiligne et circulaire par une courbe que nous croyons être l'hélice, bien que certains auteurs la désignent sous le nom de *spirale* (*History of logarithms*, en tête des HUTTON's *mathematical Tables*, 1811, p. 36. — KLÜGEL, *op. cit.*, p. 587. — BENOIT, *op. cit.*, p. VII. — SEDLACZEK, *op. cit.*, p. 3). — FORSTER et LEYBOURNE ne disent rien de cette disposition, qui n'eut sans doute pas plus de succès que les tiges articulées d'HORNER (R. WOLF, *op. cit.*, p. 354). En 1657, SETH PARTRIDGE fit construire par HAYNES des échelles logarithmiques à trois règles, dont l'une glissait entre les deux autres, liées entre elles à leurs extrémités. C'était déjà le type de la règle à coulisse moderne (*The description and use of an instrument called the double scale of proportion*. London, 1671). C'est à partir de ce moment que l'usage du nouvel instrument se répandit en Angleterre. Fabriqué d'abord à Soho, il prit le nom de *soho-scale* ou de *soho-rule*, et plus tard celui de *sliding-rule*, qu'il a conservé (KARL VON OTT, *Der logarithmische Rechenschieber*, etc. Prag,

point de départ des données analytiques et aboutissent pareillement à des résultats analytiques. Nous croyons cependant utile de

---

1874, p. 1). En 1876, l'allemand BILER supprima les indices d'OUGHTRED et rendit le disque intérieur mobile autour de son centre (LEUPOLD, *Schauplatz der Rechen- und Mess-Kunst*, etc. Lipsiæ, 1727, p. 77). Bientôt après, le *pes mechanicus*, qui nécessitait encore l'emploi du compas, fut proposé par SCHEFFELT (*Pes mechanicus artificialis*, etc. Ulm, 1699), puis perfectionné par LEUPOLD (*op. cit.*).

L'*Histoire de l'Académie des Sciences* (Paris, 1729, p. 142) contient la description d'un disque en carton, imaginé en 1727 par CLAIRAUT pour prendre les angles, faire les calculs arithmétiques et résoudre les triangles rectangles. Le même Recueil (1740, p. 59) signale une modification des bâtons de NEPER, proposée en 1730 par ROUSSAIN. En 1741, CAMUS proposa un *instrument propre à jauger les tonneaux et autres vaisseaux*, etc. Cet instrument consistait en un *bâton* à rainures dans lequel glissait une règle (*Mémoires de l'Acad. des Sciences*. Paris, 1744, p. 385 à 402). M. ROUS affirme (*op. cit.*, p. 75), sans toutefois s'appuyer sur aucun document, que le *sliding-rule* proprement dit fut inventé en 1750 par LEADBETTER, et, d'autre part, M. BENOIT (*op. cit.*, p. VIII) estime que LEADBETTER ne fit qu'expliquer (*royal gauger*) la jauge de CAMUS, dans laquelle il faudrait voir le point de départ d'un grand nombre de règles spéciales et même le type primitif de la règle à tiroir actuelle. Nous ne pouvons que maintenir, à l'encontre de ces opinions, ce que nous avons dit plus haut touchant les inventions de WINGATE et de SETH PARTRIDGE.

En 1761, LAMBERT (*Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe*, etc. Augsburg, 1761, 1772) fit construire deux règles jumelles de 4 pieds, avec graduations en regard, glissant l'une contre l'autre et fournissant des résultats approchés au demi-millième (*Encyclopédie méthodique, article de* JEAN BERNOULLI. *Rapport de* FRANCŒUR, dans le *Bulletin de la Société d'encouragement*, 20e année, p. 77).

La plupart des instruments logarithmiques que nous venons d'indiquer ont été décrits d'une manière plus ou moins complète, et quelquefois avec des variantes, par BOUGUER (*Traité de navigation*; Paris, 1698), SAVÉRIEN (*Dictionn. universel*, etc., t. I: Paris, 1753, p. 305), LEMONNIER (*Abrégé du pilotage*; Paris, 1766), PÉZENAS (*Nouveaux essais pour déterminer les longitudes*, etc.; Paris, 1768), ROBERTSON (*Treatise on mathem. instruments*; London, 1775), FORTIN (*Atlas céleste de* FLAMSTEED, 1776), et LALANDE (*Encyclop. méth.*, au mot *Échelle anglaise*).

Nous avons dit ailleurs (*Géom. de position*, p. XX) que la loi du 18 germinal an III prescrivit l'établissement d'échelles métriques pour la réduction sans calcul des mesures anciennes en mesures nouvelles. L'article XIX de cette loi est ainsi conçu : « Au lieu des tables de rapports entre les anciennes et les nouvelles mesures, qui avaient été ordonnés par le décret du 8 mai 1790, il sera fait des *échelles graphiques pour estimer ces rapports sans avoir besoin d'aucun calcul*. L'agence est chargée de leur donner la forme la plus avantageuse, d'en indiquer la méthode et de la répandre autant qu'il sera nécessaire ». On doit à cette disposition l'*Arithmétique linéaire* de POUCHET et sans doute aussi le *cadran logarithmique* proposé en 1795 par LEBLOND (*Cadrans logarithmiques appliqués aux poids et mesures*; Paris, 1799). Ce cadran, reproduit en 1798 par GATTEY sous le nom d'*arithmographe* (*Instruct. sur l'usage des cadrans logarithm.*; Paris, 1799. — *Explication de la jauge logarithm.*; Paris, 1806. — *Explication et usage de l'arithmographe*; Paris, 1810. — *Usage du calculateur*, etc.; Paris, 1819. — *Société d'encouragement*, 15e année, p. 49), ne différait

donner ici, à l'exemple de Culmann, quelques notions essentielles sur la théorie de la règle et sur son emploi. Nous voudrions pouvoir contribuer ainsi à la vulgarisation d'un instrument qui est appelé à rendre de grands services. Sans doute, les calculs par la règle ne comportent pas l'exactitude presque absolue à laquelle on peut atteindre par l'emploi des logarithmes; mais ils fournissent en beaucoup moins de temps des résultats approchés à $\frac{1}{200}$ ou à $\frac{1}{300}$, ce qui est presque toujours suffisant dans la pratique industrielle (1).

II. — Échelles mobiles.

59. Avant d'entrer dans les détails relatifs à la règle à calcul et à son usage, nous expliquerons comment on peut effectuer l'addition et la soustraction au moyen de deux échelles graduées glissant l'une contre l'autre.

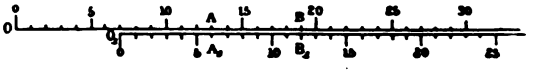
---

par aucune disposition essentielle des cercles d'Oughtred, modifiés par Biler. Moins complet que le *carton* de Clairaut, il était, d'après M. Rous (*op. cit.*, p. 75), l'exacte reproduction d'une *roue arithmétique* imaginée par Glover. A cette catégorie d'instruments circulaires se rattachent *les boîtes à calculer* d'Hoyau, divisées logarithmiquement sur leur périphérie cylindrique (*Bulletin de la Société d'encouragement*, 1816, p. 150). Toutes ces dispositions eurent peu de succès, et la règle à tiroir ne tarda pas à entrer définitivement dans la pratique française. Jomard contribua beaucoup à ce résultat. Ayant importé d'Angleterre, en 1815, la règle que les frères Jones y construisaient, il fit (1821) exécuter par Lenoir, d'après ce type, des instruments précis, à la vulgarisation desquels il sut intéresser la Société d'encouragement (*Bulletin de la Société d'encouragement*, 14e année, p. 179; 20e année, p. 4 et 77; 23e année, p. 129). Les instruments de calcul ont revêtu depuis des formes d'autant plus variées qu'on s'est attaché à répondre, par des dispositions spéciales, aux besoins particuliers des diverses industries. Nous décrirons plus loin quelques-uns de ces instruments et nous fournirons une nomenclature aussi complète que possible des autres. Qu'il nous suffise d'ajouter ici que la règle à calcul fut adoptée en Autriche vers 1840, par les soins des professeurs Adam Burg et Schulz von Strassnicki (Sedlaczek, *op. cit.*, p. 4), et qu'on doit à Quintino Sella (*op. cit.*) d'en avoir introduit l'usage en Italie quelques années plus tard.

(1) La règle logarithmique est surtout répandue en Angleterre. Les commerçants, les industriels, les hommes techniques, l'ont adoptée pour les opérations de calcul plus ordinaires, bien que son emploi soit forcément exclu d'un grand nombre d'applications dans un pays où le système décimal n'a pas encore été introduit. Nous citerons, à ce propos, le passage suivant d'une Lettre qui nous a été écrite par M. le professeur J.-D. Everett, de Belfast : « Slide rules will be much more useful in France and Italy than in England on account of the greater prevalence of decimal systems. »

Supposons d'abord que ces deux échelles portent des divisions égales, graduées dans le même sens, et que le déplacement relatif des divisions correspondantes ait été opéré dans les conditions de la *fig.* 43. Les nombres inscrits sur les divisions qui se trouvent

Fig. 43.



en regard l'une de l'autre présentent alors une différence constante qui, dans notre cas particulier, est égale à 7.

Si l'on désigne par a, b, c, ... les nombres inscrits sur les divisions de l'échelle supérieure et par a_1, b_1, c_1, ... les nombres marqués sur les divisions en regard de l'échelle inférieure, on a évidemment

$$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1 = \ldots = OO_1 = \text{const.}$$

Si l'on considère l'une de ces grandeurs, b par exemple, comme inconnue, on a

$$(\alpha) \qquad b = a - a_1 + b_1,$$

par où l'on voit que les échelles permettent de retrancher d'un nombre a un autre nombre a_1 et d'ajouter un troisième nombre b_1 à la différence.

Posons, par exemple, comme l'indique la *fig.* 43,

$$OA = a = 13, \quad O_1A_1 = a_1 = 6, \quad O_1B_1 = b_1 = 12.$$

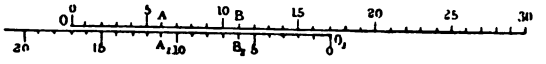
On retranche le segment OA_1 du segment OA, en mettant, par le déplacement relatif des échelles, les divisions A et A_1 en face l'une de l'autre; on obtient ainsi la différence $a - a_1 = 7$, et, comme $O_1B_1 = b_1 = 12$, on a $b = OB = 19$.

La position des échelles ne doit donc subir aucun changement tant que les deux premiers termes a et a_1 de l'équation (α) ne sont pas modifiés, et on lit immédiatement la somme b correspondant à une valeur quelconque de b_1.

60. Supposons maintenant que, l'une des échelles restant fixe,

l'autre soit renversée. On voit, par la *fig.* 44, que la somme de deux nombres placés en regard est alors constante (17 dans le cas

Fig. 44.



de la figure), et l'on a

$$a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = OO_1 = \text{const.}$$

Si l'on prend une de ces grandeurs, b par exemple, comme inconnue, on a

$$b = a + a_1 - b_1.$$

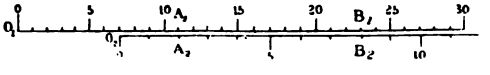
On peut donc, en déplaçant deux échelles renversées de divisions égales, ajouter à un nombre quelconque a un autre nombre a_1 et retrancher un troisième nombre b_1 de la somme des deux premiers.

La position des échelles reste invariable tant que a et a_1 ne changent pas, et l'on peut lire directement la somme b correspondant à une valeur quelconque de b_1.

61. On peut aussi accoupler dans le même sens ou en sens inverses des échelles de graduations différentes. Le plus souvent, en ce cas, les divisions sont dans le rapport de 1 à 2 ou de 1 à 3.

Dans la *fig.* 45, l'échelle inférieure est double de la supérieure;

Fig. 45.



il faudra donc multiplier les nombres de la première par deux, avant de les composer avec les nombres de la seconde. Si les nombres appartenant aux deux échelles sont respectivement affectés des indices 2 et 1, on aura pour deux échelles de même sens les différences constantes

$$a_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2 = c_1 - 2c_2 = \ldots$$

et, considérant b_1 comme inconnue,

$$b_1 = a_1 - 2a_2 + 2b_2.$$

S'il s'agit de déterminer b_2, on aura

$$b_2 = a_2 - \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}b_1.$$

Quand les deux échelles sont inversement placées, on a les sommes constantes

$$a_1 + 2a_2 = b_1 + 2b_2 = c_1 + 2c_2 = \ldots,$$

et par suite

$$b_1 = a_1 + 2a_2 - 2b_2,$$
$$b_2 = a_2 + \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}b_1.$$

En général, si les divisions des échelles, au lieu d'être dans le rapport $\frac{1}{2}$, sont dans le rapport $\frac{m}{n}$, on a respectivement, pour les échelles de même sens et pour celles de sens inverses,

$$ma_1 - na_2 = mb_1 - nb_2 = mc_1 - nc_2 = \ldots = \text{const.},$$
$$ma_1 + na_2 = mb_1 + nb_2 = mc_1 + nc_2 = \ldots = \text{const.},$$

d'où l'on déduit

$$b_1 = a_1 - \frac{n}{m}a_2 + \frac{n}{m}b_2,$$

$$b_1 = a_1 + \frac{n}{m}a_2 - \frac{n}{m}b_2.$$

Si les segments $O(ABC\ldots$ et $O_1)A_1B_1C_1\ldots$ des deux échelles, au lieu d'être proportionnels aux nombres $a, b, c, \ldots$ et $a_1, b_1, c_1, \ldots$, étaient proportionnels aux logarithmes de ces nombres, les valeurs $\log a$, $\log b$, $\log c$, ... de l'une des échelles correspondraient respectivement, sur l'autre, aux valeurs $\log a_1$, b_1, $\log c_1$, ...

III. — Description de la règle logarithmique.

62. La règle logarithmique, dans sa forme la plus usitée, présente les dispositions suivantes [1].

Une *règle* en bois, de $0^m,26$, porte sur toute sa longueur une

---

[1] On pourra suivre ces explications sur la règle construite par TAVERNIER-GRAVET.

rainure dans laquelle glisse à frottement doux une languette appelée *tiroir*. Sur le flanc supérieur de la règle, ordinairement en biseau, est une échelle de $0^m,25$ de longueur, divisée en centimètres et millimètres, graduée de zéro à 25, et dont chaque extrémité est séparée du bout voisin de la règle par un intervalle non divisé de $0^m,005$. Le flanc inférieur vertical porte une seconde échelle divisée de la même manière, mais graduée de zéro à 26 sur toute la longueur de la règle. Au fond de la rainure est une troisième échelle divisée comme la précédente, mais graduée de 26 à 52.

La face de la règle porte en outre, sur les rives de la rainure, deux échelles dites *inférieure* et *supérieure*.

Les divisions de l'échelle *inférieure* marquent des intervalles qui vont en décroissant de la gauche vers la droite, suivant une loi que nous allons d'abord indiquer.

On sait que, si deux nombres décimaux ne diffèrent que par la position de la virgule, leurs logarithmes, dans le système *vulgaire*, ont la même partie décimale ou *mantisse* et ne diffèrent que par la *caractéristique*. Ayant pris comme unité, et par suite comme expression linéaire du logarithme de 10, la longueur totale de l'échelle inférieure, soit $0^m,250$, on obtient les divisions de cette échelle en portant de gauche à droite, à partir de son origine, des longueurs proportionnelles aux logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, c'est-à-dire proportionnelles aux *mantisses* logarithmiques en général. Les divisions principales, correspondant aux logarithmes des nombres entiers 1, 2, 3, ..., 9, 10, sont marquées 1, 2, 3, ..., 9, 10 sur l'échelle. La division marquée 1 est évidemment à l'origine. Les intervalles entre deux divisions principales consécutives, entre 3 et 4 par exemple, sont subdivisés en dix intervalles secondaires, qui correspondent aux logarithmes des nombres 3,10, 3,20, 3,30, ... 3,90, et qui décroissent par conséquent suivant la même loi que les intervalles principaux. Les intervalles secondaires devraient être eux-mêmes subdivisés en dix intervalles de troisième ordre; mais, pour éviter toute confusion, on se borne à les subdiviser en dix entre les divisions principales 1 et 2, en cinq entre les divisions 2 et 3, 3 et 4, et en deux entre les divisions 5 et 10. Il en résulte que les subdivisions effectivement tracées sur l'échelle sont au nombre de cent entre les divisions principales 1 et 2, de cinquante entre les divisions 2 et 3, 3 et 4,

et de vingt entre deux divisions consécutives quelconques au delà de 4. Les divisions ainsi disposées correspondent aux nombres

1, 1,01, 1,02, ..., 1,10, 1,11, 1,12, ..., 1,98, 1,99,
2, 2,02, 2,04, ..., 2,10, 2,12, ..., 2,98, 3, 3,02, . . 3,98,
4, 4,05, 4,10, 4,15, ..., 4,95, 5, 5,05, ..., 9,95, 10,

La distance entre l'origine de l'échelle et la division qui correspond à l'un quelconque A de ces nombres, c'est-à-dire la *mantisse graphique* commune au logarithme de A et aux logarithmes des produits de A par toutes les puissances de 10, est égale au produit qu'on obtient en multipliant le logarithme de A par la longueur totale de l'échelle. Ainsi, la distance entre l'origine 1 et la division 4,65 étant de $0^m,1669$, la longueur de l'échelle étant de $0^m,250$ et le logarithme de 4,65 étant 0,6674, on vérifie que

$$0^m,1669 = 0^m,250 . \log 4,65 = 0^m,250 \times 0,6674.$$

On lit exactement sur l'échelle les nombres qui correspondent aux divisions tracées, et par suite aussi les multiples et sous-multiples décimaux de ces nombres. Quant aux nombres qui correspondent à des points compris entre deux divisions consécutives de l'échelle, on en fait l'estimation approximativement et à simple vue.

L'échelle dite *supérieure*, tracée sur l'autre rive de la rainure, se compose en réalité de deux échelles identiques situées à la suite l'une de l'autre et ne différant de l'échelle inférieure qu'en ce que leur longueur, prise comme unité et comme expression linéaire du logarithme de 10, est de $0^m,125$ au lieu de $0^m,250$. L'origine de la première échelle supérieure et l'extrémité de la seconde correspondent respectivement à l'origine et à l'extrémité de l'échelle inférieure. Chacune des échelles supérieures est partagée en neuf intervalles, limités par dix divisions principales qui sont numérotées de 1 à 10, de la gauche vers la droite. Ces intervalles sont subdivisés en dix parties, et la loi de décroissance des divisions principales et secondaires est exactement celle qui a servi de base a la construction de l'échelle inférieure. Quant aux subdivisions de troisième ordre, elles devraient être aussi au nombre de dix; mais, pour ne pas surcharger la règle, on les a réduites à cinq

entre les divisions principales 1 et 2, à deux entre les divisions 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, et on les a supprimées entre les divisions 5 et 10. A cette différence près dans le nombre des divisions de troisième ordre effectivement tracées, les échelles supérieures sont *semblables* à l'échelle inférieure et le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. La distance entre deux divisions quelconques, tracées ou non tracées, de chacune des échelles supérieures, est donc égale à la moitié de la distance comprise entre les divisions *homologues* de l'échelle inférieure, et les logarithmes des mêmes nombres sont représentés sur celle-ci par des longueurs doubles de celles qui les représentent sur chacune des deux autres. Ainsi, la distance entre la division 1 et la division 2 est $0^m,0752$ sur l'échelle inférieure et $0^m,0376$ sur les échelles supérieures.

On vient de voir que le défaut d'espace ne permet pas d'insérer sur les échelles supérieures autant de subdivisions que sur l'échelle inférieure. La première échelle supérieure à gauche ne porte, en effet, que les divisions correspondant aux nombres

1,	1,02,	1,04,	....	1,10,	1,12,	....,	1,98,	2,00,	
	2,05,	2,10,	...	2,95,	3,00,	3,05,	....,	4,95,	5,00,
	5,10,	5,20,	...,	....,	....,	....,	9,90,	10.	

Les divisions de la seconde échelle supérieure, à droite, correspondent aux nombres

10,	10,2,	10,4,	....,	11,	11,2,	..,	19,8,	20,
20,5,	21,	21,5,	...,	29,5,	30,	..,	49,5,	50,
51,	52,	53,	...,	....,	....,	98,	99,	100.

On peut donc lire sur l'échelle supérieure, considérée dans son ensemble, tous les nombres compris entre 1 et 100. Les nombres de 1 à 10 se lisent sur la première moitié de l'échelle, les nombres de 10 à 100 sur la seconde moitié.

Le tiroir est gradué sur la *face* et sur le *revers*. La face, située dans le même plan que celle de la règle, porte sur chacune de ses arêtes des divisions identiques, qui sont l'exacte répétition de l'échelle supérieure de la règle. Le revers porte diverses graduations que nous allons successivement indiquer.

L'échelle inférieure, dite *des parties égales*, a la même longueur que l'échelle inférieure de la règle, soit $0^m,250$, et est divisée en cinq cents parties égales, d'un demi-millimètre chacune. Mais elle est graduée de zéro à 1000, comme si elle portait un nombre double de divisions. La graduation est dirigée de droite à gauche, et la disposition est telle que, si l'on fait coïncider l'origine de l'échelle de face du tiroir avec l'origine commune aux échelles de face de la règle, l'extrémité droite de celle-ci marque exactement, sur le revers du tiroir, l'origine de l'échelle des parties égales. Si l'on déplace ensuite le tiroir jusqu'à ce que l'origine de son échelle de face coïncide avec une division quelconque de l'échelle inférieure de la règle, la quantité de ce déplacement sera lue exactement sur la dernière division à découvert de l'échelle des parties égales. Le nombre fourni par cette lecture sera le logarithme du nombre marqué sur l'échelle inférieure de la règle par l'origine de l'échelle de face du tiroir.

Le tiroir présente, à la partie supérieure de son revers, une seconde graduation, dite *échelle logarithmique des sinus*, qu'on obtient en portant, à partir de son origine, des longueurs proportionnelles aux logarithmes des sinus des arcs ayant pour rayon cent fois l'unité.

Cette échelle a son origine et son extrémité respectivement en regard de l'extrémité et de l'origine de l'échelle des parties égales; sa chiffraison va donc croissant de gauche à droite. L'origine correspond naturellement à l'arc dont le sinus a pour logarithme zéro. Ce sinus, égal à l'unité, c'est-à-dire au centième du rayon, est donné par l'arc de $34'33'',7$. L'extrémité de l'échelle correspond à l'arc de 90°, dont le sinus, égal au rayon, soit à 100 unités, a pour logarithme 2. Ce logarithme étant graphiquement représenté par la longueur totale de l'échelle, soit $0^m,250$, le logarithme 1 le sera par $0,125$; d'où il suit que la même unité linéaire détermine les longueurs des logarithmes sur l'échelle supérieure de la règle et sur l'échelle des sinus et que, si l'on met ces deux échelles en regard, le sinus d'un angle quelconque a pour valeur la centième partie du nombre de l'échelle supérieure qui correspond à la graduation du même angle sur l'échelle des sinus. Les divisions effectivement tracées sur cette dernière échelle procèdent de $10'$ en $10'$ depuis $40'$ jusqu'à 10°, de $20'$ en $20'$ entre 10° et 20°, de $30'$ en

30′ entre 20° et 30°, de degré en degré entre 30° et 60°, de 2° en 2° entre 60° et 70°; au delà de 70°, trois divisions sans intercalaires correspondent à 75°, à 80° et à 90°. Mais ces divisions ne sont chiffrées que de degré en degré jusqu'à 10°, de 5° en 5°, entre 10° et 20°, et de 10° en 10° entre 20° et 90°.

Le tiroir présente enfin, sur l'axe longitudinal de son revers, une troisième échelle, dite *des tangentes*, construite de la même manière que l'échelle des sinus et avec la même unité linéaire. Son extrémité correspond en effet à l'arc de 45°, dont la tangente, égale au rayon 100, a pour logarithme le nombre 2, représenté ici, comme dans l'échelle des sinus, par la longueur totale $0^m,250$. L'échelle des tangentes porte quarante-cinq divisions principales correspondant aux arcs de 1°, 2°, 3°, ..., 45°. Les divisions intermédiaires procèdent de 10′ en 10′ depuis 40′ (division voisine de l'origine) jusqu'à 10°, de 20′ en 20′ jusqu'à 20°, de 30′ en 30′ jusqu'à 45°, c'est-à-dire jusqu'à l'extrémité de l'échelle.

Sur ces échelles trigonométriques, comme sur les échelles des nombres, on doit apprécier à vue la position des points intermédiaires, qui correspondent à des angles compris entre deux divisions consécutives.

Nous avons admis jusqu'ici que le tiroir restait en *position directe*, c'est-à-dire que les divisions de son échelle de face et les divisions des échelles de la règle procédaient dans le même sens. Mais on peut retirer le tiroir de sa rainure et l'y introduire de nouveau, après l'avoir retourné, de telle sorte que, sa face restant toujours visible, les deux séries de divisions considérées soient en sens contraire. On dit alors que le tiroir est *en position inverse*. Tous les instruments ne sont pas disposés de façon à permettre ce renversement, qui n'a d'ailleurs d'utilité que pour certaines opérations effectuées au moyen de l'échelle des sinus.

IV. — Théorie et usage de la règle.

63. Nous supposerons d'abord le tiroir en position directe et ouvert dans une mesure quelconque. Soient alors a, b, ... les nombres qui marquent une suite de divisions sur l'échelle supérieure de la règle et a_1, b_1, ... les nombres qui marquent les divisions en regard sur l'échelle du tiroir. Les deux échelles sont dans la

position indiquée par la *fig.* 43, et l'on a (59)

$$\log b = \log a - \log a_1 + \log b_1,$$

d'où

$$b = \frac{a}{a_1} b_1.$$

La différence entre les logarithmes de deux nombres en regard reste constante, et, par suite, le rapport de ces nombres reste constant quand on maintient invariable la position relative des deux échelles. On lit donc immédiatement sur l'échelle supérieure le produit b de $\frac{a}{a_1}$ par un nombre quelconque b_1. Sachant d'ailleurs que o est le logarithme de 1, on pourra poser $a_1 = 1$ ou $b_1 = 1$ et obtenir le produit $b = ab_1$ ou le quotient $b = \frac{a}{a_1}$.

Soit, par exemple, à déterminer $b = \frac{6}{4}3$. On fera coïncider la division 4 du tiroir avec la division 6 de l'échelle supérieure. Deux nombres quelconques, placés en regard sur les deux échelles, seront alors dans le rapport $\frac{6}{4} = 1,5$, et, en particulier, le nombre marquant la division de l'échelle supérieure qui coïncide avec la division 3 du tiroir sera le produit cherché $b = 4,50$. De même, les produits de 1,50 par 8, par 9, etc., se liront sur l'échelle supérieure en regard des divisions marquées 8, 9, ... sur le tiroir. Les divisions des deux échelles coïncideront deux à deux dans l'ordre suivant :

Échelle supérieure....	1	1,50	4,50	6	10	12	13,50
Tiroir.....		1	3	4		8	9

64. Supposons maintenant que le tiroir soit en position inverse. L'échelle supérieure et l'échelle du tiroir sont alors graduées en sens opposés, ce qui est le cas précédemment considéré de la *fig.* 44, et nous avons (60)

$$\log b = \log a + \log a_1 - \log b_1,$$

d'où

$$b = \frac{a}{b_1} a_1.$$

La somme des logarithmes de deux nombres en regard reste con-

stante et par conséquent le produit de ces nombres reste constant, si l'on maintient le tiroir fixe dans sa position. On lit donc immédiatement sur l'échelle supérieure le quotient de aa_1 par un nombre quelconque b_1, et, selon que l'on fait b_1 ou a_1 égal à l'unité, on détermine $b = aa_1$ ou $b = \frac{a}{b_1}$.

Soit, par exemple, à calculer $b = \frac{9}{4}3$. On fera coïncider la division 3 du tiroir avec la division 9 de l'échelle supérieure, et on lira sur cette même échelle, en regard de la division 4 du tiroir, le résultat $b = 6,75$. Si l'on veut ensuite calculer $b = \frac{9}{2}3$, on maintiendra le tiroir dans sa position et on lira le résultat 13,50 sur l'échelle supérieure, en regard de la division 2 du tiroir. Les deux échelles sont, dans ce cas, disposées de la manière suivante :

Échelle supérieure.....	1	6,75	9	10	13,50	
Tiroir.....		4	3		2	1

65. Nous n'avons fait usage jusqu'ici que de l'échelle supérieure et du tiroir. Nous allons maintenant rétablir ce dernier dans la position directe et faire intervenir l'échelle inférieure, en convenant de désigner par a_2, b_2, ... les nombres qui marquent les divisions de cette échelle placées respectivement en regard des divisions a et a_1, b et b_1, ... des deux échelles précédemment considérées.

L'échelle supérieure et celle du tiroir étant l'une et l'autre à l'échelle inférieure dans le rapport de 1 à 2, ce qui est le cas indiqué par la *fig.* 45, on a (61)

$$\log a - \log a_1 = 2\log a_2 - \log a_1 = \log b - \log b_1 = 2\log b_2 - \log b_1 = \ldots$$

d'où

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a_2^2}{a_1} = \frac{b_2^2}{b_1},$$

et par suite

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2^2}\, b = \frac{a_1}{a}\, b_2^2 = \frac{a_1}{a_2^2}\, b_2^2$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}\sqrt{b_1} = \sqrt{\frac{a}{a_1}\, b_1}.$$

En faisant dans ces expressions l'une des trois longueurs égale

à l'unité, ou deux longueurs simultanément égales à l'unité, ou deux longueurs égales entre elles, on obtiendra des expressions nouvelles permettant d'effectuer, au moyen de la règle à calcul, l'élévation des nombres au carré et au cube, la division des nombres simples, des carrés et des cubes par des nombres simples et par des carrés, l'extraction de la racine carrée des nombres simples et des nombres élevés au cube, et par conséquent la formation de la puissance $\frac{3}{2}$, la division des puissances par une racine carrée et la détermination des moyennes proportionnelles.

66. Les divisions des échelles correspondent, comme on l'a vu, aux mantisses des logarithmes, et sont indépendantes des caractéristiques, qu'il est dès lors nécessaire de calculer séparément. On fait ordinairement ce calcul de tête.

Il arrive souvent que l'opération nécessite un ensemble d'additions et de soustractions de mantisses, conduisant à une somme algébrique plus grande que l'unité. L'extrémité de la mantisse linéaire qui correspond à cette somme tombe alors sur la seconde échelle supérieure, au delà de la division 10, et le logarithme du résultat cherché doit avoir à sa caractéristique une unité de plus que le nombre calculé d'après la seule considération des caractéristiques partielles. La caractéristique du résultat devrait être, au contraire, diminuée d'une unité, si l'expression numérique à calculer avait à son dénominateur un nombre assez élevé pour que l'extrémité de la dernière mantisse tombât en un point de la première échelle supérieure.

Soit, par exemple, à calculer $b = \frac{9}{4}7$ au moyen des échelles ainsi disposées :

Échelle supérieure.....	1		9	10	15,75
Tiroir.....		1	4		7

La somme des caractéristiques est évidemment nulle dans ce cas; mais les mantisses linéaires qui entrent dans le calcul, et qui doivent être portées sur l'échelle supérieure, à partir de l'origine, aboutissent en un point de la seconde échelle et déterminent finalement une mantisse plus grande que l'unité. On ajoutera donc 1 à la caractéristique o et l'on composera de deux chiffres la partie

entière du résultat, c'est-à-dire qu'on lira 15,75 sur l'échelle supérieure.

La même position des échelles permet de calculer $b = \frac{90}{0,4}700$. La somme des caractéristiques étant $1 - \bar{9} + 2 + 1 = 5$, on a pour résultat 157500.

Soit maintenant à calculer $b = \frac{2}{9}3,5$. Les échelles doivent être ainsi disposées:

Échelle supérieure....	1		78	10	2		10	
Tiroir.....		1	35		9	10		

La mantisse du résultat ayant, dans ce cas, son extrémité en un point de la première échelle supérieure, la somme nulle des caractéristiques partielles doit être diminuée d'une unité. La caractéristique du résultat est donc -1, et ce résultat doit être lu 0,78.

La même position des échelles permet de calculer $b = \frac{0.2}{900}.0,035$. Le résultat ne diffère du précédent que par la position de la virgule, et cette position est déterminée par la caractéristique

$$\bar{9} - 2 + \bar{8} - 1 = \bar{4}.$$

On lira donc 0,0000078.

Si, dans la détermination des caractéristiques, il intervient des nombres au carré, on double les caractéristiques des logarithmes de ces nombres et l'on opère d'ailleurs comme il vient d'être dit.

Soit à calculer $b_1 = \frac{1}{9}\overline{2,6}^2$. L'opération comporte l'usage des trois échelles ainsi disposées :

Échelle supérieure..	1			9	10				10	
Tiroir.....		1		4		10				10
		1	3			10	1,2	3		10
Échelle inférieure...	1		2,6	3			5,2	8,22	10	

On détermine cette position en plaçant la division 4 du tiroir sous la division 9 de l'échelle supérieure, et on lit le résultat 3 sur le tiroir en regard de la division 2,6 de l'échelle inférieure. La somme des caractéristiques étant nulle, on aura, d'après la règle précédemment indiquée, $b_1 = 3,00$. (Un calcul numérique rigoureux aurait donné 3.0044.)

La même position des échelles permet de calculer $b_1 = \frac{40}{0,9}\overline{52}^2$. Le résultat est fourni, sauf la position de la virgule, par la division 1,2 du tiroir, située au-dessus de la division 5,2 de l'échelle inférieure. Dans ce cas, la somme des caractéristiques devant être augmentée d'une unité, on a pour caractéristique du résultat $1 - \bar{9} + 2 \times 1 + 1 = 5$, et par suite $b_1 = 120000$. Le résultat exact est 120178.

On calculera encore, sans déplacer les échelles, l'expression

$$b_2 = \sqrt{\tfrac{9}{4}3}.$$

La caractéristique étant 0, on lit le résultat 2,6 sur l'échelle inférieure, en regard de la division 3 du tiroir. Le calcul rigoureux aurait donné $b_2 = 2,598$.

La somme des caractéristiques relatives aux nombres placés sous le radical doit être divisée par 2. Lorsque cette somme est un nombre pair, la caractéristique entière du résultat est exactement fournie par la division. Lorsque la somme est un nombre impair, le quotient de la division par 2 doit être diminué d'une demi-unité.

Si, dans ce cas, on prend pour échelle logarithmique l'échelle inférieure de la règle, les longueurs prises sur les deux autres échelles $(\sqrt{a}, \sqrt{a_1}, \sqrt{b_1})$ doivent être considérées comme des demi-logarithmes, et la fraction $\frac{1}{2}$ représente la longueur de l'échelle supérieure ou de l'échelle du tiroir qui doit être ajoutée au résultat logarithmique fourni par l'échelle inférieure.

Soit, par exemple, à calculer $b_2 = \sqrt{\tfrac{9}{4}30}$. La caractéristique est $(0 - 0 + 1) = \frac{1}{2}$, et, en se conformant à la règle que nous venons d'indiquer, on lira le résultat 8,22 sur l'échelle inférieure, en regard de la division 3 du tiroir.

Si les données de l'opération conduisaient à dépasser les limites de l'échelle inférieure, on pourrait encore lire le résultat sur cette échelle, à la condition d'ajouter l'unité à la somme des caractéristiques, c'est-à-dire de former $1 - \frac{1}{2}$ à la place de $\frac{1}{2}$.

Soit, par exemple, à calculer $b_2 = \sqrt{\tfrac{9}{4}80}$. On disposera ainsi les échelles :

Échelle supérieure.....		1			10			10
Tiroir.....	1		8	10		10		
Échelle inférieure.....		1	1342		10			10

La caractéristique étant 1, on lira le résultat 13,42.

L'échelle inférieure étant simple, il n'est pas toujours possible d'arriver au résultat par une seule lecture. Si, par exemple, l'échelle supérieure et l'échelle du tiroir marquent le rapport $\frac{9}{4}$, on ne peut pas lire en même temps, sur le tiroir et sur l'échelle inférieure, les rapports compris entre $\frac{4.4}{1^2}$ et $\frac{1}{\overline{1.5}^2}$, entre $\frac{1}{\overline{4.74}^2}$ et $\frac{4.4}{1^2}$.

On peut déterminer le cube d'un nombre A en plaçant le tiroir, soit en position directe, soit en position inverse.

Dans le premier cas, on amène l'origine du tiroir au-dessus du nombre A de l'échelle inférieure et on lit le résultat sur l'échelle supérieure, au-dessus de la division A du tiroir.

Dans le second cas, on place en regard l'une de l'autre les divisions A de l'échelle inférieure et du tiroir et on lit le cube sur l'échelle supérieure, en regard de l'origine de l'échelle du tiroir. Lorsque A est plus petit que $\sqrt[3]{10} = 2,154$, le résultat est lu sur la première échelle supérieure et la caractéristique est égale au triple du nombre. Lorsque A est compris entre 2,154 et $\sqrt[3]{100} = 4,642$, le résultat est lu sur la seconde échelle supérieure et la caractéristique est égale au triple du nombre $+1$. Pour des nombres plus grands que 4,642, la lecture se ferait sur la troisième échelle et la caractéristique serait égale au triple du nombre $+2$.

On extrait les racines cubiques en opérant à l'inverse de ce qui vient d'être dit pour l'élévation à la troisième puissance.

Soit à calculer $b_2 = \sqrt[3]{a.a_1} = \sqrt[3]{a_2^2.a_1}$. Le tiroir étant placé en position inverse, on fait coïncider son origine, son milieu ou son extrémité, avec la division de l'échelle supérieure qui correspond au nombre dont on cherche la racine cubique. Cette racine a pour valeur celle des nombres égaux entre eux qui se trouvent en regard sur le tiroir et sur l'échelle inférieure. On devra chercher ces nombres en regard entre zéro et 2,15 si la caractéristique ne contient pas de fraction, entre 2,15 et 4,64, si la caractéristique résulte d'un nombre entier augmenté de $\frac{1}{3}$ ou diminué de $\frac{2}{3}$, et entre 4.64 et 10, si la caractéristique résulte d'un nombre entier augmenté de $\frac{2}{3}$ ou diminué de $\frac{1}{3}$.

Soit à calculer, par exemple,

$$b_2 = \sqrt[3]{4 \times 9} = \sqrt[3]{4 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^2 \times 9}.$$

Les échelles seront ainsi disposées :

Échelle supérieure..	1			4	9	1		3.6		
Tiroir renversé...			1	9	4			1		
		1.532	1	9	4		3.3	1	7.12	
Échelle inférieure...	1	1.532		2	3		3.3	6	7.12	1

et l'on aura

$$\sqrt[3]{3,6} = 1.532, \text{ a caractéristique étant } 0,$$
$$\sqrt[3]{36} = 3.3, \quad \text{»} \quad \tfrac{1}{3},$$
$$\sqrt[3]{360} = 7.12, \quad \text{»} \quad \tfrac{2}{3}.$$

On doit, dans l'évaluation des dernières décimales, tenir compte de ce que les petites différences numériques égales correspondent à des différences de longueurs qui sont, sur l'échelle inférieure, doubles de ce qu'elles sont sur l'échelle du tiroir. Si donc on lit, tout près d'un point où deux nombres égaux doivent coïncider, deux nombres un peu différents en regard l'un de l'autre, la différence entre ces deux nombres et celui d'exacte coïncidence varie du simple au double, selon qu'on la relève sur l'échelle inférieure ou sur le tiroir. Si l'on fait coïncider, par exemple, les nombres 9, on a

Tiroir.....	9.1	9	8,9
Échelle inférieure.....	8.95	9	9,05

et l'on observe que le nombre 9 est placé : d'une part, au tiers de la distance entre 9,05 et 8,9, à partir de 9,05; d'autre part, au tiers de la distance entre 8,95 et 9,1, à partir de 8,95.

67. Nous avons vu plus haut, en décrivant les échelles trigonométriques du tiroir, la relation qui existe entre les sinus des angles marqués sur l'échelle dite *des sinus* et les nombres correspondants de l'échelle supérieure de la règle, lorsque, le tiroir étant retourné, on fait coïncider les origines et les extrémités de ces deux échelles. Mais il n'est pas nécessaire de retourner le tiroir pour obtenir le sinus d'un angle.

Soit α l'angle donné. On fera glisser le tiroir vers la droite jusqu'à ce que la division de l'échelle des sinus correspondant à cet angle vienne coïncider avec l'extrémité de la règle. L'extrémité

de l'échelle supérieure de la règle marquera alors, sur l'échelle de face du tiroir, un nombre a dont la centième partie sera égale à $\sin\alpha$. Cela résulte immédiatement de ce que la partie de l'échelle des sinus qui reste dans la rainure est égale à la partie de l'échelle de face du tiroir qui est comprise entre son origine et la division a.

Les nombres $a, c, 1$ de l'échelle de face du tiroir correspondant respectivement aux nombres $100, b, m$ de l'échelle supérieure de la règle, on a

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{100}{a} = \frac{b}{c} = \frac{m}{1}$$

et par conséquent $\text{cosec}\,\alpha = m$.

On déterminera le sinus d'un angle plus grand que 90° en prenant le sinus de son supplément et le cosinus d'un angle quelconque en prenant le sinus de son complément. On déterminera aussi la sécante d'un angle en considérant qu'elle est l'inverse du cosinus.

On procède d'uue manière analogue avec l'échelle des tangentes, construite, ainsi qu'on l'a vu, d'après le même principe que celle des sinus. C'est ainsi que, pour déterminer $\text{tang}\,\alpha$ on amène la division α de l'échelle des tangentes à coïncider avec l'extrémité de la règle; l'extrémité de l'échelle supérieure de la règle marque alors sur l'échelle de face du tiroir la division a, telle que

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a}{100}.$$

On a par suite

$$\text{cotang}\,\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{100}{a} = \frac{m}{1} = m.$$

Pour trouver l'angle dont le sinus est égal à $\frac{5}{7}$, on placera la division 5 de l'échelle de face du tiroir sous la division 7 de l'échelle supérieure de la règle, et l'extrémité de la règle marquera, sur l'échelle des sinus, l'angle cherché qui est de 45°35′.

Pour trouver l'angle qui a pour tangente $\frac{1}{2}$, on placera l'origine de l'échelle de face du tiroir sous la division 2 de l'échelle supérieure et on lira l'angle de 26°35′ au point de l'échelle des tangentes marqué par l'extrémité de la règle.

Si l'angle cherché est plus grand que 45°, c'est-à-dire si la tan-

gente donnée est plus grande que 1, et, par exemple, égale à $\frac{40}{17}$, on remarque que

$$\text{cotang}\, x = \text{tang}(90^\circ - x) = \frac{17}{40}$$

et de l'angle $90^\circ - x = 23^\circ$ on déduit $x = 67^\circ$.

Les développements dans lesquels nous sommes entrés permettront d'effectuer les opérations plus complexes dans lesquelles les lignes trigonométriques interviennent.

On déterminera, par exemple, le produit $x = 3,47 \times \sin 40^\circ 30'$ en faisant venir la division $40^\circ 30'$ de l'échelle des sinus à l'extrémité de la règle et en lisant, sur l'échelle de face du tiroir, le nombre 2,26 placé sous le nombre 3,47 de l'échelle supérieure.

On déterminera le quotient $x = \frac{3,47}{\sin 40^\circ 30'}$ en lisant, dans la même position des échelles, le nombre de l'échelle supérieure placé au dessus de la division 3,47 du tiroir.

On calculera $x = \frac{45,5 \times \sin 20^\circ}{\sin 37^\circ}$ en retournant le tiroir, plaçant 37° de l'échelle des sinus en face de 45,5 de l'échelle supérieure et lisant le résultat 25,8 sur l'échelle supérieure au-dessus de la division marquée 20°.

On résoudra l'équation $\text{tang}\, x = \frac{\text{tang}\, 37^\circ \times 16,8}{41,5}$ en amenant 37° de l'échelle des tangentes sous 41,7 et lisant sur la même échelle le résultat $x = 17^\circ$ au-dessous du nombre 16,8 de l'échelle supérieure.

Ces exemples, que nous croyons inutile de multiplier, conduisent immédiatement à l'emploi de la règle logarithmique pour la résolution des triangles.

68. On a aussi étendu l'usage de la règle à la résolution numérique des équations.

Considérons d'abord l'équation du second degré

$$x(x - p) = q,$$

dont les racines sont l'une positive et l'autre négative. On placera l'origine du tiroir en position inverse au-dessous du nombre q de l'échelle supérieure de la règle, et l'on cherchera sur cette échelle

et sur celle du tiroir deux nombres correspondants dont la différence soit p. Le plus grand de ces nombres sera la valeur positive de x, et le plus petit, affecté du signe —, en sera la valeur négative.

L'équation $x(x+p)=q$ se résout comme la précédente, mais la racine qui est positive dans l'une est négative dans l'autre et *vice versâ*.

En appliquant ce qui précède à l'équation $x(x-8)=14$, on trouve les racines $x'=9,48$ et $x''=-1,48$. Pour l'équation $x(x+7)=42$, on trouve $x'=3,87$ et $x''=-10,87$.

Considérons maintenant l'équation du troisième degré

$$x^3-px^2-q=0 \quad \text{ou} \quad x^2(x-p)=q.$$

Son unique racine, positive et plus grande que p, sera déterminée en plaçant l'origine du tiroir en position inverse au-dessous du nombre q de l'échelle supérieure et en lisant sur l'échelle inférieure le nombre qui surpasse de la quantité p celui qui lui correspond sur le tiroir.

S'il s'agit de l'équation $x^3+px^2+q=0$, qui n'a pas de racines positives, on changera x en $-z$ et on aura la nouvelle équation

$$z^3-pz^2-q=0,$$

qui est de la première forme.

Si l'équation donnée est $x^3+px+q=0$, on pose $x=-\frac{q}{y}$, on divise par q, et l'on obtient la nouvelle forme $y^2(y-p)=q^2$, qu'on résout comme il vient d'être expliqué. Les racines de l'équation donnée sont les valeurs de $-\frac{q}{y}$ correspondant aux valeurs y de l'équation transformée [1].

---

[1] Voir pour plus de détails sur cette question : Bour, *Résolution des équations numériques du troisième degré au moyen de la règle à calcul*, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. XLIV, 1857, p. 22-25; A. Labosne, *Instruction sur la règle à calcul*, etc.; Paris, 1872, p. 20-32. On se trouve assez rarement dans le cas d'avoir à résoudre des équations du troisième degré, et, lorsque ce cas se présente, on ne peut pas, le plus souvent, se contenter du petit nombre de décimales que la règle fournit. Le procédé indiqué par Bour a cependant l'avantage de procurer sans calcul une première approximation. Après cette recherche, qui exige ordinairement un assez grand nombre de tentatives, on a recours aux procédés algébriques, s'il y a lieu.

V. — Modifications apportées à la règle logarithmique.

69. On trouve dans le commerce des règles de $0^m,52$, dans lesquelles certaines échelles s'écartent de la disposition que nous avons précédemment décrite. La face du tiroir, au lieu de présenter, sur chacun de ses bords, une reproduction de l'échelle supérieure de la règle, porte deux échelles différentes, respectivement pareilles aux échelles de la règle qui leur font vis-à-vis. Sur le revers du tiroir, l'échelle des parties égales est placée entre les deux autres, et la graduation de l'échelle des sinus est renversée par rapport à la graduation de l'échelle des tangentes.

Ces grandes règles sont toujours munies d'un indicateur. Elles comportent un plus grand nombre de divisions et permettent, dès lors, de calculer avec plus d'exactitude. Le degré d'approximation, en ce qui touche la multiplication, la division et les proportions, est notablement accru par l'adjonction sur la face du tiroir d'une échelle égale à l'échelle inférieure de la règle. On arrive en effet, grâce à cette modification, au même degré d'approximation qu'avec une règle du type ordinaire, mais dont la longueur serait quadruplée.

70. Une modification apportée à la règle logarithmique par M. Mannheim [1] permet d'obtenir, non seulement pour la multiplication et pour la division, mais encore pour les proportions, les carrés, les cubes, les racines carrées et cubiques, etc., des résultats deux fois plus approchés qu'avec une règle ordinaire de même longueur. Dans la nouvelle règle, dite à *échelles repliées*, la règle proprement dite porte deux échelles égales, dont les divisions s'étendent de 1 à 10. La face du tiroir porte également deux échelles. L'inférieure est divisée en parties égales, de 1 à 500. La

---

[1] Voir Häseler, *Anweisung für die von M. Mannheim verbesserten Rechenstäbe* (sans date); A. Mannheim, *Règle à calcul à échelles repliées; instruction abrégée* (1851). Le principe de la règle à échelles repliées a été appliqué sur une règle cylindrique dont le modèle est exposé dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers. Ce modèle, de $0^m,135$ de longueur, permet d'obtenir le produit de deux nombres avec l'approximation que donnerait une ancienne règle ordinaire de 2^m. (*Notice sur les travaux mathématiques de* M. Mannheim, etc., Paris, 1875, p. 33).

supérieure reproduit les divisions des échelles de la règle, à cette différence près que, au lieu de porter le nombre 1 à l'origine et le nombre 10 à l'extrémité, elle porte le nombre 1 en son milieu. La disposition est celle qu'on obtiendrait en supprimant les deux quarts extrêmes d'une échelle double, étendue de 1 à 100, et en conservant la moitié intermédiaire, formée de deux parties symétriques par rapport à la division 10. Les points où l'échelle double se trouverait ainsi coupée correspondent à $\sqrt{10}$ et à $10\sqrt{10}$, car $\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ et $\log 10\sqrt{10} = 1 + \frac{1}{2}$.

Les nombres doivent être lus sur la moitié du tiroir à droite ou sur la moitié à gauche, selon que leurs premiers chiffres significatifs sont inférieurs ou supérieurs aux premiers chiffres de $\sqrt{10}$. Le revers du tiroir est disposé comme si une échelle simple, graduée de 1 à 10, mais deux fois plus longue que les précédentes, avait été divisée en deux parties égales, dont on aurait placé la première au bord supérieur du revers et la seconde au bord inférieur (1).

---

(1) Nous empruntons à l'instruction rédigée par M. Mannheim quelques brèves indications sur l'emploi de cet instrument.

Multiplication.— Amener le 1 milieu du tiroir en regard de l'un des nombres et lire le produit sur le tiroir en regard de l'autre nombre. Le 1 milieu étant amené sous 2, on trouve au-dessus de 3 le produit $6 = 2 \times 3$. S'il s'agit de multiplier 4 par 3, le 1 milieu amené sous 4 ne permet pas de lire le produit au-dessous de 3; on l'amène alors au-dessous de 3, et le produit 12 est lu en regard du 4 du tiroir.

Division.—Amener le dividende lu sur le tiroir en regard du diviseur; lire le quotient en regard de l'un des 1 de la règle. Pour diviser 9 par 2, on amène 9 sous 2, et le quotient 4,5 est lu en regard du 1 gauche de la règle. Pour diviser 9 par 4, on amène 9 sous 4, et le quotient 2,25 est lu en regard du 1 droite de la règle.

Proportions. — Mettre en regard les termes du rapport connu et lire la valeur de l'inconnue en face du terme connu du second rapport. Les numérateurs doivent être lus sur la même ligne et les dénominateurs pareillement. Il est quelquefois nécessaire de transformer la proportion donnée. Dans la proportion $\frac{2}{4} = \frac{12}{x}$, par exemple, on ne peut pas lire x sur le tiroir après avoir lu 2 sur la règle. On place alors 2 du tiroir en regard de 4 de la règle, et l'on trouve sur la règle $x = 24$ en regard de 12. On peut toujours donner à une proportion la forme qui permet d'obtenir le résultat par un seul mouvement du tiroir.

Carrés et racines carrées.— Retourner le tiroir pour faire usage de l'échelle repliée, et faire coïncider les divisions 1 de cette échelle avec les divisions 1 de la règle. Les nombres lus sur la règle sont alors les carrés des nombres lus en regard sur le tiroir, et *vice versa*.

Cubes et racines cubiques. — Renverser l'échelle repliée. Pour déterminer le cube de

La règle est munie d'un *curseur*, dont on fait usage quand le résultat ne peut être fourni que par une suite d'opérations.

La règle à échelles repliées permet d'obtenir, à dimensions égales, des résultats plus approchés. Ses inconvénients tiennent à l'absence des échelles trigonométriques et à la réduction du nombre des opérations qu'on peut mener à fin sans déplacer le tiroir.

71. M. L. Lalanne a fait construire des règles en carton, comprises entre deux lames de verre. La table supérieure contient quatre échelles, qui sont comme l'échelle des sinus, l'échelle des tangentes, l'échelle supérieure et l'échelle inférieure de la règle ordinaire, et qui se succèdent, de haut en bas, dans l'ordre où nous venons de les énumérer. Deux coupures pratiquées dans le carton, l'une entre les deux premières échelles, l'autre entre les deux dernières, laissent voir, sur la face d'un tiroir glissant au-dessous du carton fixe, deux nouvelles échelles, qui ne diffèrent en rien de l'échelle placée sur la face du tiroir dans la règle ordinaire. Les revers de la règle et du tiroir portent des échelles pareilles à l'échelle inférieure de la règle ordinaire.

La règle en carton est très utile, à raison surtout de ce qu'on peut faciliter un grand nombre de calculs pratiques en inscrivant divers facteurs constants sur ses échelles. Son principal inconvénient consiste dans la fragilité de l'enveloppe ([1]).

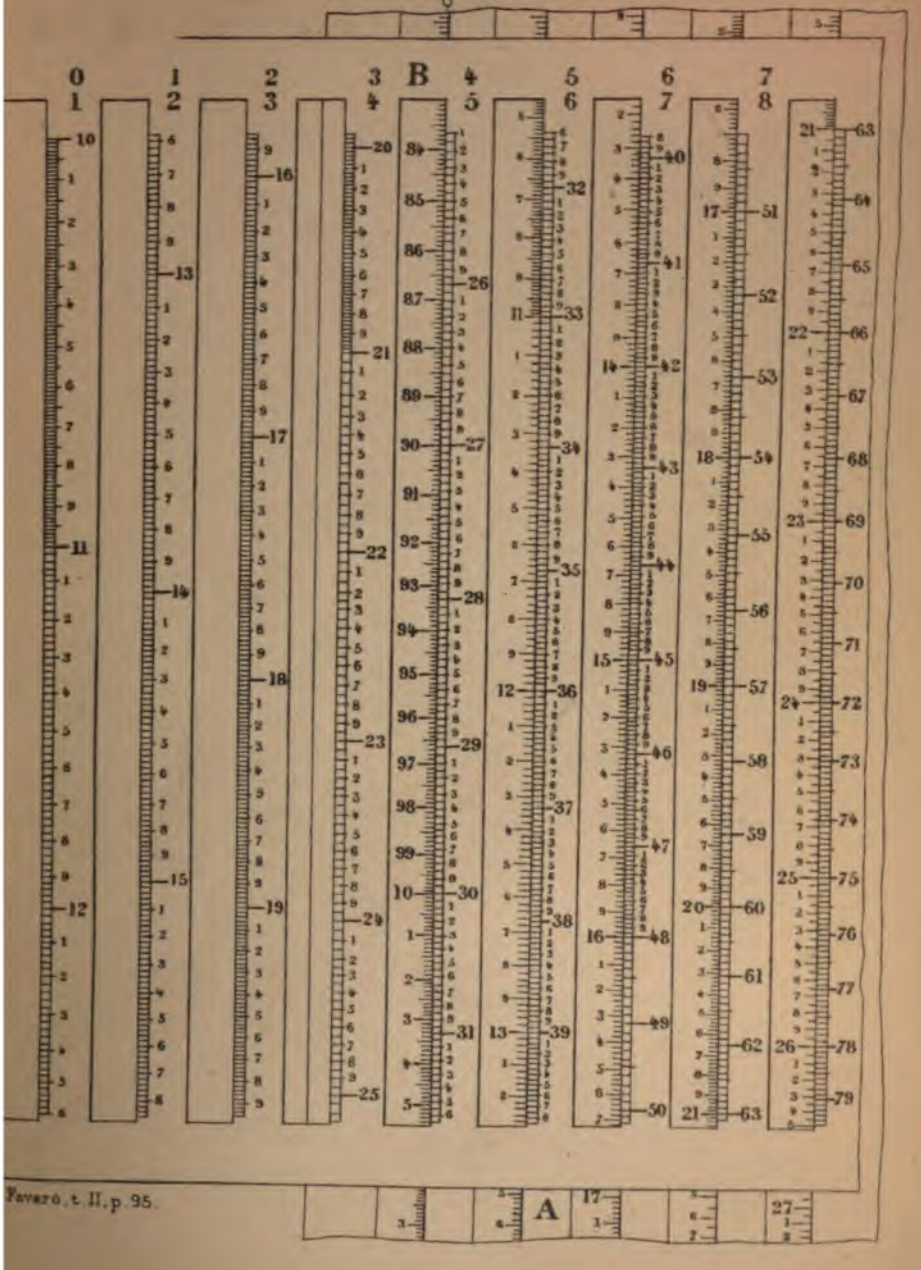
3, par exemple, amener 3 du tiroir en regard de 3 de la règle et lire le résultat 27 sur la règle en regard de 1 du tiroir. Inversement, pour déterminer la racine cubique de 27, amener 1 du tiroir en regard de ce nombre et chercher les deux divisions en regard, réelles ou fictives, qui sont affectées du même nombre 3.

Logarithmes.— Lire les nombres sur l'échelle repliée, retournée, mais non renversée, et les logarithmes au revers du tiroir, en regard du trait marqué dans une encoche derrière la règle. 2 du tiroir étant amené au-dessous de 1 gauche de la règle, on lit derrière celle-ci $\log 2 = 0,301$. Lorsque le nombre est lu sur le tiroir en face du 1 de l'échelle inférieure de la règle, on ajoute 5 au premier chiffre de la partie décimale du logarithme. Si l'on a amené, par exemple, le 4 du tiroir en regard du 1 gauche de la règle, on lit 0,102 au revers, et l'on écrit $\log 4 = 0,602$.

([1]) M. Lalanne a rapporté, dans une publication récente, les circonstances qui l'ont amené à adopter cette disposition : « L'usage de la règle à calcul venait, dit-il, d'être introduit dans l'enseignement secondaire et figurait dans les programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École militaire; mais les instruments de ce genre manquaient, et la plate-forme qu'un habile constructeur (M. Gravet, successeur de Lenoir) montait à grands frais exigeait encore un long travail. C'est dans ces circonstances que la règle à enveloppe de verre fut

Universel proportion table Pl. 1.

(Fig. 46)



Favaro, t. II, p. 95.

VI. — Universal proportion Table.

72. Nous devons mentionner tout particulièrement, parmi les instruments auxiliaires de calcul, l'*universal proportion Table* du professeur Everett.

Cette Table se compose (*Pl. I*) de deux cartons A et B, contenant chacun une double suite continue de nombres. Les chiffres employés à la graduation sont de deux sortes. Les uns, en gros caractères, accouplés deux à deux, représentent les deux premiers chiffres des nombres et sont placés en regard des divisions principales. Les autres, en caractères plus petits et isolés, représentent le troisième chiffre des mêmes nombres et sont placés en regard des divisions de second ordre. Les nombres ainsi représentés peuvent être entiers ou fractionnaires, aucune différence n'existant, quant aux chiffres significatifs, entre un nombre quelconque et son produit ou son quotient par 10.

La première division principale de la première colonne à gauche du carton B est marquée **10** et peut représenter, selon les cas, 1000, 100, 10, 1, 0,1, 0,01, ... La division de second ordre immédiatement inférieure est marquée 1 et peut représenter 1010, 101, 10,1, 1,01, ... Viennent ensuite les divisions de second ordre marquées 2, 3, ..., 9 et aboutissant à la division principale **11**. Les distances entre les divisions secondaires marquées 1, 2, ..., 9 sont à leur tour subdivisées par neuf traits de troisième ordre, non chiffrés, en dix intervalles égaux.

A partir de la division principale **11** et jusqu'à la division principale **21**, les intervalles de troisième ordre sont réduits de dix à

---

imaginée. Au moyen d'une gravure exécutée avec précision, M. Lalanne put faire livrer en quelques semaines, aux établissements d'instruction publique, des centaines de règles glissantes, d'une précision généralement égale à celle de la règle en bois, d'une lecture plus facile, donnant plus de résultats, et dont le prix ne surpassait pas le tiers du prix de celle-ci » (*Notice sur les travaux et titres scientifiques de* M. Léon Lalanne, etc.; Paris, 1876, p. 34). M. Lalanne a expliqué l'usage de sa règle dans une brochure intitulée *Instruction sur les règles à calcul et particulièrement sur la nouvelle règle à enveloppe de verre* (1851, 1854 et 1863). Cette brochure a été traduite en anglais (*A Treatise on the slide rule with description of Lalanne's glass rule*, by the Rev. W. Elliot, London, 1851), en allemand (*Gebrauchs-Anweisung für Rechenstäbe*, etc., Paris, 1852) et en espagnol (*Instruccion sobre las reglas de calcolo*, etc., Paris, 1852).

cinq, d'où il suit que, si **11** représente le nombre 1100, les quatre traits diviseurs compris entre **11** et $\mathbf{11}_1$, par exemple, ne représentent pas 1101, 1102, 1103 et 1104, mais bien 1102, 1104, 1106 et 1108. Les divisions comprises entre **11** et le pied de la première colonne représentent dès lors tous les nombres pairs, depuis 1100 jusqu'à 1260; les divisions de la seconde colonne représentent les nombres pairs depuis 1258 jusqu'à 1586; celles de la troisième colonne représentent les nombres pairs depuis 1584 jusqu'à 1996. La quatrième colonne commence à 1994 et donne tous les nombres pairs jusqu'à 2100. Au delà de ce nombre, les intervalles de troisième ordre, qui avaient décru par degrés imperceptibles depuis **11**, augmentent subitement en étendue, et leur nombre entre deux divisions successives de second ordre se trouve réduit à deux. Par suite, les divisions comprises entre **21** et le pied de la colonne marquent 2100, 2105, 2110, 2115, ... Les divisions de la cinquième colonne représentent les nombres de cinq en cinq, depuis 2510 jusqu'à 3165. De même, celles de la sixième colonne, depuis 3160 jusqu'à 3985, et celles de la septième depuis 3980 jusqu'à 4800. A partir de 4800, les divisions de troisième ordre disparaissent; les petits caractères qui représentaient jusque-là les troisièmes chiffres des nombres disparaissent aussi; les neuf divisions intermédiaires de second ordre sont maintenues, bien qu'elles cessent d'être chiffrées, et les nombres croissent de dizaine en dizaine jusqu'à la fin de la septième colonne, c'est-à-dire jusqu'à 5020, ou, ce qui revient au même, d'unité en unité depuis 480 jusqu'à 502. Ce système de division et de graduation se poursuit jusqu'à la fin de la dixième colonne, c'est-à-dire jusqu'au nombre 1000.

Les divisions et chiffraisons des dix autres colonnes de B répètent les dispositions que nous venons de décrire. Chaque nombre figure donc deux fois sur le carton, et un nombre quelconque, pris dans l'une des dix premières colonnes, se trouve répété, à la même hauteur, dans la dixième colonne à droite de celle que l'on considère.

Les colonnes du carton B alternent avec des lumières rectangulaires, à travers lesquelles on peut faire apparaître les colonnes divisées et chiffrées du carton A.

Les nombres figurent aussi deux fois sur ce carton, mais avec une disposition différente. La moitié inférieure de chaque colonne est exactement reproduite dans la première moitié de la colonne

suivante. Cette disposition s'applique même à la vingtième et dernière colonne, considérée comme précédant immédiatement la première.

Indépendamment des divisions que nous venons d'indiquer, chaque carton porte une série de droites tracées dans toute son étendue et seulement interrompues, dans le carton B, par les vides à travers lesquels doivent apparaître les chiffres du carton A. Ces droites ont pour objet de faciliter l'adaptation des cartons lorsque A est recouvert par B. Le désir d'éviter toute confusion nous a conduit à ne pas les représenter sur la figure.

On superpose les cartons de telle sorte que les colonnes de divisions et les chiffres de A soient visibles à travers les vides de B; on établit ensuite une correspondance parfaite entre les divisions, en faisant coïncider les droites dont nous venons de parler. Tous les nombres de l'un des cartons sont alors proportionnels à ceux qui leur font face sur l'autre. Par exemple, si 16 sur A a été mis en face de 48 sur B, ce qui est le cas de la *fig.* 46, chacun des nombres de A sera les $\frac{16}{48}$ ou le $\frac{1}{3}$ du nombre correspondant de B. On dispose ainsi d'une Table qui comprend tous les nombres possibles et qui fournit tous les rapports possibles entre ces nombres.

On ne peut effectuer directement que des règles de trois au moyen des cartons. Pour obtenir la quatrième proportionnelle entre trois nombres donnés, il faut placer le second terme de B en face du premier terme de A : le nombre cherché se trouve sur B, en face du troisième terme de A.

La Table d'Everett permet de résoudre très simplement les problèmes suivants : multiplication, division, réduction d'échelles ou de valeurs, formation de Tables de correspondance entre deux quantités variant dans un rapport constant, mesure des aires et des volumes, élévation aux puissances, recherche de la valeur des expressions de la forme ar^n ou $\frac{a}{r^n}$, extraction des racines, détermination du logarithme d'un nombre quelconque, etc.

VII. — Fuller's computing telegraph.

73. Bien que les divers systèmes précédemment décrits réalisent de grands avantages, on doit reconnaître que la forme circulaire

convient mieux à une règle logarithmique. Un instrument de cette forme, proposé en Amérique par John Fuller [1], a acquis en Angleterre un succès mérité. On peut adopter, dans sa construction, diverses dispositions, parmi lesquelles nous signalerons la suivante.

Deux disques superposés, de $0^m,1$ de rayon, tournent autour de leur axe commun. Le limbe de chacun d'eux porte une échelle logarithmique disposée de telle sorte que la circonférence entière représente le logarithme de 10. Les petits arcs marqués par les divisions du limbe correspondent aux mantisses des logarithmes des nombres 100, 101, 102, jusqu'au nombre 1000, qui coïncide avec 100. Pour un rayon de $0^m,100$, le développement de la circonférence est de $0^m,628$, et les $2^{mm},7$ qui séparent 100 de 101 peuvent être, à vue d'œil, divisés au moins en trois parties. Au delà de 300, la graduation est faite de deux en deux unités et porte les nombres 302, 304, 306, ..., jusqu'à 500 (différence $0^m,001$). De 500 à 1000, la graduation est faite de cinq en cinq unités et donne 505, 510, ..., 995, 1000 (différence $1^{mm},7$).

Si l'on veut, par exemple, diviser 100 par 1,45, on fera tourner l'un des disques jusqu'à ce que sa division 145 corresponde à la division 100 de l'autre disque : la division 100 du premier disque correspondra alors au nombre 689,75 ou 68,975 du second, c'est-à-dire au quotient de 100 par 1,45. On lira de la même manière le quotient correspondant à tout autre nombre. L'erreur ne dépasse pas $\frac{3}{1000}$.

L'instrument de Fuller a été construit à un point de vue purement commercial et en dehors de toute préoccupation scientifique. Sa vulgarisation rendrait accessibles à tous des opérations qui ne peuvent être effectuées que par un petit nombre de personnes.

VIII. — Arithmographe circulaire.

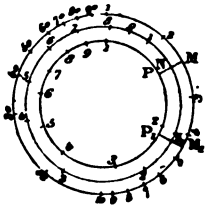
74. Sur trois échelles circulaires concentriques (*fig.* 47), deux

---

[1] *Telegraphic computer, a most wonderful and extraordinary instrument, by which business questions, of every possible variety, are instantly performed : a safe and speedy check to avoid vexatious errors, affording at the same time a greater amount of practical business knowledge, than can be obtained for ten times the cost of the work.* Sold only by subscription, JOHN E. FULLER, proprietor, New-York.

sont supposées fixes et présentent, à partir d'un même rayon, des graduations respectivement semblables à celles des échelles inférieure et supérieure de la règle logarithmique ordinaire. La troisième échelle circulaire, comprise entre les deux autres et formant tiroir, est graduée comme l'échelle supérieure de la règle et tourne autour du centre commun.

Fig. 47.



Soient M, N, P et M_1, N_1, P_1 deux séries de nombres correspondant à des divisions qui coïncident dans une certaine position de l'échelle mobile. On aura

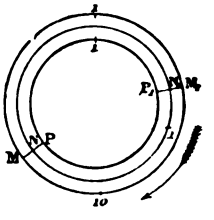
$$\frac{\sqrt{M}}{N} = \frac{\sqrt{M_1}}{N_1} = \frac{P}{N} = \frac{P_1}{N_1}$$

si

$$\frac{m+1}{2} - n = \frac{m_1+1}{2} - n_1 = p - n = p_1 - n_1,$$

m et m_1 étant les nombres de chiffres de M et de M_1 ou ces nombres diminués d'une unité selon qu'on lit M et M_1 sur la première ou sur la seconde partie du cercle extérieur; p et p_1 étant les nombres de chiffres de P et de P_1; enfin n et n_1 étant les nombres de chiffres de N et de N_1 lorsque N et N_1 sont lus en dehors de l'intervalle compris entre l'origine des échelles fixes et l'origine de l'échelle mobile. Si au contraire l'un de ces nombres, N_1 par exemple, se trouve placé dans cet intervalle (*voir* la *fig.* 48, où le sens de la graduation est indiqué par une flèche), n_1 est supérieur d'une unité au nombre de chiffres de N_1.

Fig. 48.



L'arithmographe circulaire fournit les produits, les quotients et les quatrièmes termes des proportions avec la même approximation qu'une règle ordinaire dont la longueur serait égale au double de la circonférence de contact de l'échelle intérieure et de l'échelle intermédiaire.

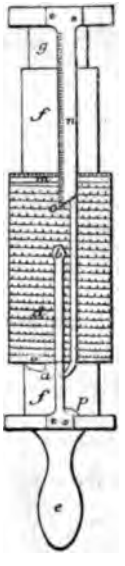
75. Parmi les diverses dispositions qu'on peut donner aux échelles circulaires, nous citerons encore celle qui consiste à les

tracer sur un cylindre. La partie de la surface cylindrique qui porte l'échelle intermédiaire tourne alors autour de l'axe.

IX. — Spiral slide rule de Fuller.

76. Le professeur Georges Fuller, de Belfast, a récemment imaginé sous ce nom l'*hélice à calcul* que nous allons décrire [1].

Fig. 49.



Un cylindre *d* (*fig.* 49), monté sur un manchon concentrique *f*, est susceptible d'un mouvement de rotation autour de son axe et d'un mouvement de translation suivant le même axe. Une échelle logarithmique ordinaire est enroulée en spirale autour du cylindre. Un indice *b* est fixé par une tige à la poignée *e* du manchon *f*. Une seconde tige rattache deux autres indices *a* et *c* à l'arbre *g*, qui glisse à frottement doux dans le manchon *f*. La distance *ac* est égale au segment de génératrice cylindrique compris entre l'origine de la spirale et son extrémité. Les mouvements relatifs des trois pièces concentriques permettent de placer les indices *a* et *c* en regard de tous les points du cylindre *d*. Deux arrêts *o* et *p* sont respectivement fixés à *d* et à *f*, de telle sorte que, si on les fait buter l'un contre l'autre, l'indice *b* marque l'origine de l'échelle logarithmique. L'appareil porte encore deux échelles : l'une rectiligne, *n*, tracée sur la tige *ac* des indices mobiles; l'autre circulaire, *m*, placée à la base supérieure du cylindre *d*.

Cette disposition permet d'avoir une échelle logarithmique très développée sur un appareil de dimensions restreintes. L'échelle spirale étant d'ailleurs unique, chacune de ses unités de longueur correspond à deux unités de l'échelle rectiligne pratiquée sur la règle ordinaire. La spirale, dont la longueur totale est de 500 pouces soit de $12^m,70$, équivaut donc à une règle droite de $25^m,40$ ou à un appareil circulaire de $4^m,038$ de diamètre. Elle fournit des résultats approchés au dix-millième et présente des intervalles

---

[1] *Spiral slide rule, equivalent to a straight slide rule* 83 *feet* 4 *inches long, or, a circular rule* 13 *feet* 3 *inches in diameter*, George Fuller, M. Inst. C. E., professor of engineering in the Queen's University, Ireland. London, 1878.

de $0^m,000552$ entre deux nombres consécutifs de quatre chiffres.

Son développement permet d'imprimer en regard des divisions les trois premiers chiffres des nombres, alors que le premier chiffre seulement peut trouver place sur la règle ordinaire. Enfin, les opérations effectuées au moyen des indices deviennent purement mécaniques et n'exigent aucun effort d'esprit.

Les intervalles entre deux divisions principales consécutives de l'échelle sont subdivisés en dix parties depuis l'origine jusqu'au nombre 650 et en cinq parties seulement depuis 650 jusqu'à 1000; d'où il suit que les nombres de quatre chiffres sont tantôt marqués directement sur l'échelle, tantôt complétés, quant au quatrième chiffre, par le point de l'échelle qui occupe le milieu entre deux divisions consécutives. C'est ainsi que le nombre 5285, par exemple, correspond exactement à une division tracée, tandis que le nombre 8853 doit être lu au milieu de l'intervalle qui sépare 8852 de 8854.

Les intervalles de second ordre ont d'ailleurs, dans la plus grande partie de l'échelle, une amplitude suffisante pour qu'on puisse facilement apprécier à l'œil de nouvelles subdivisions et lire des nombres de cinq chiffres. Comme dans tous les instruments à division logarithmique, les nombres marqués sont, à volonté, entiers ou fractionnaires, les résultats absolus étant les mêmes pour un nombre donné et pour le produit ou le quotient de ce nombre par une puissance quelconque de 10.

Pour effectuer une multiplication au moyen de l'hélice calculatrice, on place l'indice fixe *b* en regard de 100 et l'un des indices mobiles (*a* ou *c*) en regard du multiplicande. On fait ensuite mouvoir le cylindre *d* jusqu'à ce que le multiplicateur soit marqué par l'indice fixe, et on lit le produit sous l'un des indices mobiles (*c* ou *a*).

S'il s'agit d'une division, on place l'indice fixe sur le diviseur, et l'on amène en regard du dividende l'indice mobile supérieur *c* ou l'indice inférieur *a*, selon que le premier chiffre du diviseur est plus grand ou plus petit que le premier du dividende. On déplace ensuite le cylindre *d* de façon à ramener l'indice *b* à l'origine de l'hélice, c'est-à-dire à 100, et on lit le quotient en face de l'un des deux indices mobiles.

Pour effectuer simultanément une multiplication et une divi-

sion, c'est-à-dire pour trouver le quatrième terme $x = \frac{mn}{p}$ d'une proportion, on amène l'indice fixe en regard du dénominateur, puis l'un des indices mobiles en regard de l'un des facteurs du numérateur, et l'on déplace le cylindre jusqu'à ce que le second facteur soit marqué par l'indice fixe. Le quatrième terme de la proportion est alors fourni par le point de l'échelle en regard duquel se trouve l'un des deux indices mobiles.

Pour obtenir directement le produit mnp de trois nombres, on amène l'indice fixe à 100 et l'indice mobile à m; on met le cylindre en mouvement jusqu'à ce que l'indice mobile marque l'extrémité de l'échelle; on place ensuite l'indice mobile en regard de n et on fait de nouveau mouvoir le cylindre jusqu'à ce que l'indice fixe se trouve en face de p. On lit alors le produit mnp en regard de l'indice mobile.

Pour l'élévation aux puissances et pour l'extraction des racines, on place l'indice mobile supérieur c en regard du nombre donné; on détermine, au moyen des échelles auxiliaires m et n, la mantisse du logarithme de ce nombre; on ajoute la caractéristique, et, selon le cas, on multiplie par l'indice de la puissance ou l'on divise par l'indice de la racine. On amène ensuite le cylindre d à la position qui permet de lire sur les échelles m et n la partie décimale du produit ou du quotient ainsi obtenu. La puissance ou la racine est alors marquée par l'indice c sur l'hélice.

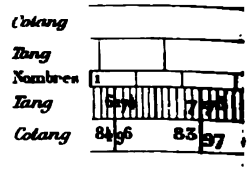
Lorsque ces dernières opérations doivent porter sur des fractions décimales, on évite l'emploi des caractéristiques négatives et les erreurs qui pourraient en être la conséquence en effectuant la transformation des fractions décimales en fractions ordinaires.

L'hélice, comme tous les instruments analogues, se prête à un grand nombre d'opérations, telles que les calculs d'intérêts simples ou composés, les déterminations d'aires, etc.

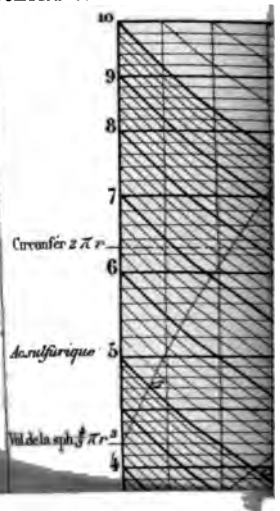
X. — Abaque de M. L. Lalanne.

77. L'*abaque* ou *compteur universel* de M. Lalanne est une Table extrêmement ingénieuse, fondée sur le même principe que la règle logarithmique [1]. Elle consiste (*fig.* 50, Planche) en un

[1] Voir L. Lalanne, *Description et usage de l'abaque*, etc. (1845; 2e édit., 185[illegible]



POIDS ET MESURES



carré de $0^m,20$ de côté, dont la base et le côté gauche vertical sont divisés en 90 parties, proportionnelles aux logarithmes des 90 nombres compris entre 10 et 100, ou plutôt aux excès de ces logarithmes sur l'unité. Le nombre 1 est à l'origine, le nombre 2 à la dixième division, 3 à la vingtième, 4 à la trentième, et ainsi de suite jusqu'à la quatre-vingt-dixième division, en regard de laquelle se trouve le nombre 10. Par les points de division sont tracées des droites horizontales et verticales, parallèles aux côtés du carré, et des droites parallèles à l'une des diagonales.

Toutes les propriétés dont jouit l'abaque se déduisent du principe fondamental en vertu duquel le produit de deux nombres se trouve, comme dans la Table de Pythagore, à la rencontre de deux droites, l'une horizontale, l'autre verticale, correspondant aux deux facteurs ([1]). La valeur de ce produit est indiquée par le chiffre de l'oblique qui passe par le point de rencontre. Ainsi, l'horizontale 3 et la verticale 2 se coupent sur l'oblique 6; l'horizontale 3, 6 et la verticale 4,7 se coupent à peu près sur l'oblique 16,9, et, comme le dernier chiffre à droite du produit est un 2, ce produit est exactement 16,92.

La division s'opère à l'inverse de la multiplication. Pour diviser 6 par 2, on suivra l'horizontale 2 jusqu'à la rencontre de l'oblique 6, et le quotient 3 sera indiqué par le rang de la verticale sur laquelle on tombe. Pour diviser 15,4 par 4,4, on suivra l'horizon-

---

3e édit., 1863). Traduction anglaise : *Explanation and use of the abacus or french universal reckoner;* London, 1846. Traduction allemande : *Beschreibung und Gebrauchsanweisung des Abacus oder der allgemeinen Rechnungstafel;* Leipzig, 1846. Voir aussi SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE, *Rapport fait par* M. THÉOD. OLIVIER, *au nom du Comité des arts mécaniques, sur un abaque ou compteur universel, par M. Léon Lalanne,* Paris, 1er avril 1846; JULES DE LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive,* Paris, 1860, p. 196-203.

([1]) Nous avons tenu à placer dans ce Chapitre même, tout entier consacré aux instruments de calcul, la partie du Mémoire précité de 1843 qui se rapporte à la description et à l'usage de l'*abaque*. On verra plus loin que l'*abaque* est une application spéciale du principe général de transformation proposé par M. LALANNE sous le nom d'*anamorphose géométrique*. La simple traduction graphique de la Table de Pythagore, c'est-à-dire de l'équation $xy = z$, aurait fourni, dans l'espèce, un Tableau composé des hyperboles équilatères $xy = a$, $xy = b$, ... La *graduation des coordonnées*, non plus suivant les valeurs de x et de y, mais suivant les valeurs de $x_1 = \log x$ et de $y_1 = \log y$, a permis de remplacer, dans le Tableau, les hyperboles $xy = z$ par les droites parallèles $x_1 + y_1 = z_1$.

tale 4,4 jusqu'à l'oblique 15,4; le point de rencontre est sur la verticale 3,5, ce qui donne le quotient cherché.

Pour élever un nombre au carré, on opère plus simplement que s'il s'agissait d'une multiplication ordinaire, en observant qu'une horizontale et une verticale qui portent le même numéro se coupent toujours sur la diagonale du carré de la figure. Ainsi, pour avoir le carré de 25, il faut suivre la verticale 2,5 jusqu'à la rencontre de cette diagonale, qui porte l'inscription de *carrés;* on y tombe sur l'oblique 6,25 : donc $\overline{25}^2 = 625$.

Réciproquement, on obtient la racine carrée d'un nombre en cherchant sur la ligne des carrés ce nombre (ou son produit par une puissance positive ou négative de 100) et en lisant le numéro de la verticale correspondante. Ainsi, les racines carrées des nombres 4, 9, 16, 25, ..., pris sur la ligne des carrés, sont 2, 3, 4, 5, ..., numéros des verticales correspondantes. Si l'on voulait avoir $\sqrt{36241}$, on prendrait le nombre 3,62 sur la ligne des carrés, et l'on verrait qu'il correspond à la verticale 1,90, d'où

$$\sqrt{36241} = 190$$

(approximativement).

Le logarithme d'un cube se compose du logarithme de la racine et du double de ce même logarithme. C'est pour ce motif que la ligne des cubes, qui part de l'origine, est inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base. Cette ligne sortirait du cadre à sa partie supérieure; mais, en vertu de la symétrie de la figure, on a rapporté dans le bas la portion qui serait sortie dans le haut, de sorte qu'une seconde ligne des cubes, inférieure à la première, sert dans le cas où celle-ci vient à manquer.

La lecture sur ces lignes, tant pour l'élévation au cube que pour l'extraction de la racine, se fait comme sur la ligne des carrés. Toutefois, dans l'extraction de la racine cubique, il faut n'opérer que sur des nombres compris entre 1 et 100. On ramène tout nombre à ces limites en le multipliant ou en le divisant par une puissance convenable de 1000. Ainsi, pour trouver la racine cubique de 1 708 248, on divisera par $\overline{1000}^2$ et on lira 1,71 sur la première ligne des cubes. Ce nombre correspond à la verticale 1,195; on posera donc $\sqrt[3]{1708248} = 119,5$.

En suivant l'analogie, il sera facile de tracer sur la Table les lignes qui servent à élever aux puissances ou à extraire les racines d'un degré quelconque. Ainsi, la quatrième puissance doit se trouver sur l'une des trois transversales que l'on peut tracer sur la figure, à 1 de base pour 3 de hauteur; la cinquième puissance est sur l'une des quatre transversales inclinées à 1 de base pour 4 de hauteur, et ainsi de suite.

Pour une puissance de certain degré, la première de ces transversales partira toujours de l'angle du cadre qui est en bas et à gauche; la deuxième commencera au pied de la verticale en haut de laquelle se termine la première; la troisième commencera au pied de la verticale en haut de laquelle se termine la deuxième, et ainsi de suite.

L'élévation aux puissances fractionnaires plus grandes que l'unité se ferait à l'aide de transversales tracées sur l'abaque d'après les mêmes principes. Ainsi, pour la puissance $\frac{3}{2}$, l'inclinaison de la transversale serait de 1 de base pour $\frac{3}{2} - 1$ ou $\frac{1}{2}$ de hauteur.

Or la première ligne des cubes est inclinée sur le bord à gauche, précisément comme devrait l'être la ligne des puissances $\frac{3}{2}$ sur le bord inférieur du cadre. On se servira donc de cette ligne des cubes pour trouver les puissances $\frac{3}{2}$.

On demande, par exemple, la puissance $\frac{3}{2}$ de 5. Partons du nombre 5, pris sur le bord à gauche du cadre, et suivons l'horizontale correspondante jusqu'au point de rencontre de la première ligne des cubes. L'oblique que l'on peut imaginer par ce point porterait le nombre 11,2 à ses extrémités. On posera donc $5^{\frac{3}{2}} = 11,2$.

La détermination du terme inconnu dans une proportion n'exige qu'une multiplication et une division. L'abaque est donc essentiellement applicable au calcul de ce terme. Seulement, l'ordre dans lequel ces opérations sont effectuées pourra varier. La méthode la plus commode est fondée sur ce qu'une proportion doit être considérée comme l'assemblage de deux rapports égaux. Si donc on lit les deux antécédents sur les obliques et les deux con-

séquents sur les horizontales de la figure, les points de rencontre de chaque oblique avec l'horizontale correspondante sont sur une même verticale.

La règle dite *de trois*, les règles *de société, d'intérêt simple* et *d'escompte* se réduisent à des multiplications et à des divisions successives, que la Table permet d'effectuer. Les calculs d'*intérêt composé*, d'*amortissement*, etc., se font au moyen des racines et des puissances que la Table fournit.

La Table se prête aussi à la *conversion* des poids et des mesures. Une quantité quelconque étant numériquement exprimée en fonction d'une certaine mesure prise pour unité, on la rapporte à une autre mesure en multipliant le nombre qui la représente par le rapport de la première unité de mesure à la seconde. Il suffit de marquer ce rapport constant par un trait sur l'un des côtés du cadre pour effectuer toutes les conversions relatives aux mesures considérées. On lit au bord du cadre, du côté gauche, en regard d'un certain nombre de traits, des notations abrégées qui se rapportent à divers cas usuels de conversion. On opère les conversions inverses en employant comme diviseurs les nombres qui servent de multiplicateurs dans les opérations directes.

Pour faciliter les opérations où le nombre 2π entre comme multiplicateur ou comme diviseur, on a tracé dans l'intérieur du cadre une horizontale qui passe par le point 6,28 de la graduation du bord à gauche. On obtiendra donc à vue, très-promptement, la circonférence dont on connaît le rayon ou le rayon d'une circonférence de longueur donnée.

Les transversales marquées πr^2 sont tracées parallèlement à la ligne des carrés. Elles servent à trouver immédiatement l'aire d'un cercle dont on donne le rayon ou le rayon d'un cercle dont on connaît l'aire.

Les trois transversales tracées parallèlement aux lignes des cubes et désignées par $\frac{4}{3}\pi r^3$ servent à résoudre les problèmes relatifs au volume de la sphère.

D'autres traits, marqués sur les bords du cadre ou qu'on peut y ajouter, permettent de lire immédiatement un grand nombre de résultats utiles, tels que l'aire d'un polygone régulier dont on connaît le côté, le poids d'un corps dont on connaît la densité et le

volume, les proportions de divers corps entrant dans une combinaison chimique, les éléments de calcul des formules relatives à la chute des corps, à l'écoulement des liquides, aux oscillations pendulaires, etc., dans lesquelles les quantités g, $2g$, $\sqrt{g}$,... entrent comme facteurs.

Les deux échelles quintuples placées l'une au-dessus, l'autre au-dessous du Tableau, servent à mettre les lignes trigonométriques dont elles portent les noms en correspondance avec les nombres marqués sur le bord inférieur de l'abaque. Ces nombres et leurs divisions sont reproduits dans la bande qui sépare les divisions trigonométriques sur chacune des deux échelles. Grâce à cette disposition, on peut effectuer avec l'abaque tous les calculs dans lesquels les lignes trigonométriques n'entrent que comme multiplicateurs ou comme diviseurs, ce qui est le cas ordinaire.

L'abaque, fixé sur un carton et accompagné d'un style qui permet d'en suivre les diverses lignes, donne les résultats des opérations avec autant d'exactitude qu'une règle logarithmique qui aurait une longueur égale à deux fois le côté du cadre (1).

78. Le professeur Herrmann a récemment proposé, sous le titre de *Graphisches Einmaleins*, une Table réputée nouvelle, mais qui est, en réalité, la reproduction fidèle de l'abaque Lalanne (2), ainsi qu'on en peut juger par le seul exposé du principe.

---

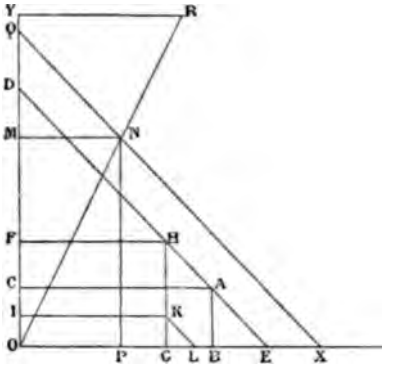
(1) Voir, au *Rapport* précité d'Olivier, p. 4-6, une intéressante étude comparative des résultats fournis par la règle logarithmique et par l'abaque.

(2) Une seule différence, purement matérielle, consiste en ce que M. Herrmann a divisé sa table en deux parties, pour en faciliter le pliage et le déplacement (*Das graphische Einmaleins*, Braunschweig, 1875, p. 13, note). Il est permis de trouver surprenant que, dans les vingt-deux pages qui composent son *Instruction*, M. Herrmann, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle, n'ait pas une seule fois laissé tomber de sa plume le nom de M. Lalanne. Cet oubli paraît d'autant moins excusable que, dès l'année 1876, ainsi que nous l'avons indiqué, une publication allemande de *L'abaque Lalanne* a été faite à Leipzig. Par un contraste d'ailleurs remarquable, tandis que M. Lalanne se montrait prodigue de son invention et favorisait ou autorisait toutes les reproductions propres à la vulgariser, M. Herrmann déclarait, dans son *Graphisches Einmaleins*, que les contrefacteurs seraient poursuivis (*Nachdruck wird verfolgt*).

L'abaque de M. Lalanne a été reproduit aussi par Vogler dans les *Sechs graphische Tafeln zum Schnellrechnen und zum Schnellquotiren*, etc., *nebst Gebrauchsanweisung*. Berlin, 1877. — Voir l'importante publication de Vogler ayant pour titre *Anleitung*

Soit A (*fig.* 51) un point quelconque donné par ses coordonnées orthogonales AB et AC. On mène par ce point une droite DAE,

Fig. 51.



dite diagonale, qui fait avec chacun des deux axes un angle de 45°. On a

$$OD = OE = CA + BA = OC + OB;$$

et par suite

$$OC = OE - OB; \quad OB = OD - OC;$$

c'est-à-dire que l'une des coordonnées d'un point quelconque est égale à la différence entre le segment déterminé sur les axes par la diagonale de ce point et la seconde coordonnée du même point. Imaginons que les axes portent des divisions logarithmiques, de telle sorte qu'on ait

$$OC = \log a \quad \text{et} \quad OB = \log b.$$

Il est clair que la diagonale DE déterminera sur les axes des segments OD, OE égaux à la somme des logarithmes de a et de b, égaux par conséquent au logarithme du produit ab. La règle pour la multiplication de deux nombres peut donc être ainsi formulée : on cherche les facteurs sur les axes, et la diagonale qui passe par le point correspondant à ces facteurs coupe sur les mêmes axes le produit cherché.

---

zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen, etc. Berlin, 1877.

La règle de la division est tout aussi simple. Pour diviser un nombre d par un autre c, on cherche le dividende d sur l'un des axes et l'on mène la diagonale correspondante. On cherche pareillement le diviseur c sur l'un des axes, celui des Y par exemple, et par le point correspondant on mène à l'axe des X une parallèle que l'on prolonge jusqu'à son point de rencontre avec la diagonale précédemment tracée. L'abscisse de ce point est le quotient demandé.

On peut donc prendre le diviseur sur l'un quelconque des axes et l'on trouve le quotient sur l'autre. Il est d'ailleurs évident que tous les points d'une même diagonale DE correspondent au même produit et à la même somme de coordonnées $OC + OB = OD$.

De là résulte la possibilité de combiner une multiplication avec une division. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'obtenir la valeur de $\frac{ab}{f}$. On prend a sur l'un des axes, b sur l'autre; on mène la diagonale du point A ainsi déterminé; on porte ensuite sur l'un des axes, celui des Y par exemple, l'ordonnée $OF = f$. La parallèle FH à l'axe des X coupe la diagonale au point H, dont l'abscisse OG est la valeur $g = \frac{ab}{f}$.

Si l'on avait encore à multiplier ce quotient par un nombre i, le point d'intersection k de HG et de la parallèle aux X menée par I donnerait, par sa diagonale, le point L, extrémité du segment $l = i\frac{ab}{f}$. Et ainsi de suite.

On effectue très simplement de la même manière l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

Menons par l'origine O une droite OR, telle que $YR = \frac{1}{2}OY$. Le coefficient d'inclinaison de cette droite ou la tangente de son angle d'inclinaison sur l'axe OX est 2. Si par un point quelconque N de cette transversale on mène trois droites NM, NP, QNX respectivement parallèles à l'axe des X, à l'axe des Y et aux diagonales, on a

$$(1) \qquad OM = 2OP \quad \text{ou} \quad OP = \frac{1}{2}OM.$$

S'il s'agit d'élever un nombre p au carré, on cherche ce nombre sur l'axe des X, et du point P qui lui correspond on mène aux Y

une parallèle qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la transversale en N. On mène par ce point une parallèle aux X jusqu'à la rencontre des Y au point M qui détermine le carré cherché. On trouve d'une manière analogue la racine carrée d'un nombre m.

$$(2) \qquad OQ = OX = 3OP \quad \text{ou} \quad OP = \frac{1}{3}OQ = \frac{1}{3}OX.$$

Pour élever un nombre p à la troisième puissance, on mène par le point correspondant P de l'axe des X une parallèle à l'axe des Y; par le point N, où cette parallèle rencontre la transversale OR, on mène la diagonale qui détermine, soit le point Q sur les Y, soit le point X sur les X. Ces points correspondent au cube cherché. L'opération inverse fournit la racine cubique d'un nombre proposé :

$$(3) \qquad OQ = OX = \frac{3}{2}OM \quad \text{ou} \quad OM = \frac{2}{3}OQ = \frac{2}{3}OX.$$

On obtiendra d'une manière analogue les valeurs de $(\sqrt{m})^2$, $(\sqrt[3]{p})^2$.

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'on pourra déterminer les puissances et les racines d'un degré quelconque en traçant des transversales convenablement inclinées par rapport aux axes (1).

---

(1) SEDLACZEK (*Ueber Visir und Recheninstrumente*, Wien, 1856, p. 3-4) comptait, en dehors de la règle ordinaire et de la *Gunter's line*, seize sortes d'instruments à division logarithmique, savoir :

1. *Sliding rule*. — 2. Règle d'ÆSTERLE. — 3. Règle à calcul de LENOIR. — 4. Règle de SCHWIND. — 5. *Engineers sliding rule*. — 6. Règle de L.-C. SCHULZ. — 7. *Inverted slide rule*. — 8. Règle de HIGGISON. — 9. *Improved calculating rule*. — 10. *For mill wrights*. — 11. *For marine use*. — 12. *For timber mensuring*. — 13. DR. ROGET *sliding rule for involution and evolution*. — 14. *Sliding rule* pour le calcul des prix. — 15. Règle chimique [sans doute l'instrument proposé par WOLLASTON dans son Mémoire *A synoptic scale of chemical equivalents; Philosophical Transactions* de la S. R. de Londres, 1814, et *Journal des Mines* (t. XXXVII, p. 101, 1815)]. — 16. Règle de SEDLACZEK pour les calculs d'interpolation.

Cette nomenclature, qui paraît viser les règles proprement dites, à l'exclusion des autres formes, devrait être augmentée aujourd'hui d'un très grand nombre d'autres instruments, parmi lesquels nous nous bornerons à signaler les suivants :

17. Règle de HOARE (*The slide-rule and how to use it*, etc., by CHARLES HOARE, London, 1875). — 18. PALMER'S *Computing scale* (New-York, 1843). — 19. FULLER'S *Computing telegraph*. — 20. Disque logarithmique de SONNE (*Ann. du génie civil*, 1866; *Instruments et mach. à calculer*, Paris, 1868, p. 75). — 21. Arithmoplanimètre

XI. — Système Peaucellier.

79. Nous ne terminerons pas ce Chapitre, consacré aux instruments de calcul, sans parler du *Système de pièces rigides articulées à liaison complète,* appelé système *Peaucellier*, du nom de son inventeur (¹).

---

de LALANNE (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* avril et mai 1840, et *Annales des Ponts et Chaussées*, 1840). — 22. Règle à enveloppe de verre de LALANNE. — 23. Abaque de LALANNE. — 24. Règle à échelle repliée de MANNHEIM. — 25. *Rechenknecht* d'HERRMANN (HERRMANN's *Rechenknecht* von Wiesenthal und Cie in Aachen, 1878). — 26. Règle de SOLDATI (*Regolo logaritmico per calcoli di celerimensura,* etc. Voir *Atti della Società degli ingegneri e degli industriali di Torino,* Torino, 1872, p. 32). — 27. Arithmographe polychrome de DUBOIS (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* août 1860, p. 273. — *Atti dell' Imp. Reg. Istituto veneto,* etc., Venezia, 1860-1861, p. 376). — 28. Arithmographe circulaire (*Teoria e pratica del regolo calcolatore,* per QUINTINO SELLA, Torino, 1859, p. 112). — 29. Arithmographe cylindrique (*La Tachéométrie,* etc., par J. PORRO, Turin, 1850, p. 74, et QUINTINO SELLA, *op. cit.*, p. 114). — 30. Stéréomètre de PUSCARIU (*Das Stereometer. Privilegirtes Körper-Messinstrument,* von Johann Ritter von PUSCARIU. Budapest, 1877). — 31. Universal proportion Table d'EVERETT (London, published by Longmans, Green and Dyer). — 32. Cercle à calcul de BOUCHER (Note de J. BERTILLON dans *la Nature,* 8 juin 1878, n° 262, p. 31-32). — 33. ROUTLEDGE's *Slide rule.* — 34. HAWTHORN's *Slide rule.* — 35. BUILDER's *Calculating slide rule* (*Catalogue of instruments manufactured,* by W.-F. STANLEY, London, 1877, p. 30). — 36. Règle à calcul TAVERNIER VINAY et TAVERNIER GRAVET (*Die graphische Statik* von C. CULMANN, Zurich, 1875, p. 58). — 37. COGGESHALL's *Sliding rule* (London, 1844). — 38. BRADFORD's *Sliding rule* (London, 1845). — 39. Échelles logarithmiques centésimales de PORRO (J. PORRO, *op. cit.*, p. 75). — 40. Règle anglaise à deux languettes (CULMANN, *op. cit.*, p. 73). — 41. Règle à calcul à deux règlettes de E. PERAUX (*Instruction* de l'inventeur, Nancy, avril 1866, et *Annales du Génie civil,* juin 1874). — 42. *Rechenstab* de DENNERT et PAPE (*Deutsche Bauzeitung,* Bd. 8, 1874, p. 136). — 43. *Rechenstab* de ESCHMANN, perfectionné par WILD (*Der topographische Distanzmesser mit Rechenschieber* von J. STAMBACH, Aarau, 1872). — 44. Règle logarithmique pour la tachéométrie, de MOINOT (*Levée de plans à la stadia,* par I. MOINOT, Paris, 1877, p. 41-67). — 45. *Arithmographe* de CASTIGLIANO (*Descrizione ed uso di un nuovo aritmografo,* etc. Voir *L'Ingegneria civile e le Arti industriali,* vol. VII, p. 71. Torino, 1881).

(¹) On a vu d'abord dans la découverte du colonel PEAUCELLIER une propriété cinématique permettant de produire un mouvement parfaitement rectiligne, au moyen d'un système de tiges rigides articulées et de centres fixes, sans le secours de rainures, rouages ou guides quelconques. On sait que, dans le système du balancier et du parallélogramme de WATT, généralement adopté pour la transformation du mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire continu, l'articulation de la tige oscillante ne décrit pas exactement une droite, mais un arc de courbe presque rectiligne. Bien que cette solution approximative ne présente dans la pratique aucun inconvénient sérieux, les géomètres ont fréquemment cherché à réduire encore la déviation de la tige oscillante. TCHEBICHEFF (*Mémoires des Savants étrangers* de l'Aca-

Ce système se prête en effet à de nombreuses et importantes applications, relatives au tracé des courbes et aux procédés mécaniques de Calcul (¹). C'est à ce dernier point de vue seulement que nous nous proposons de le considérer.

Fig. 52.

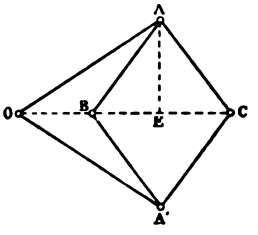
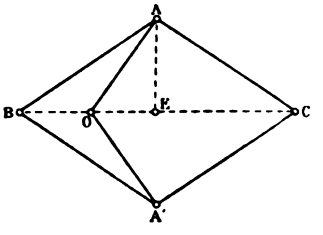


Fig. 53



L'appareil (*fig.* 52 et 53) consiste essentiellement en un losange formé de quatre tiges égales, articulées entre elles à leurs extré-

démie de Saint-Pétersbourg, 1854, et *Bulletin* de la même Académie, 1862) conclut à l'impossibilité d'obtenir une solution rigoureuse du problème par un système articulé de cinq pièces. Diverses combinaisons de tiges articulées ont permis à M. Peaucellier de réaliser mathématiquement la transformation de mouvement dont il s'agit (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, 1864, p. 414). Après avoir donné matière à deux Communications de M. Mannheim (*Société philomathique* de Paris, 1867), cette découverte a été développée par l'auteur lui-même (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 71-78, et note citée au sommaire bibliographique du présent Chapitre). M. Peaucellier a d'ailleurs établi (voir *Revue scientifique*, 30 avril 1875, p. 951-952) que la prétendue démonstration de Tchebicheff repose sur une base erronée. On trouve aussi d'utiles renseignements sur ce sujet dans les publications de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Lille (voir *Revue scientifique*, 2 janvier 1875, p. 640-641). Il semble établi, toutefois, que M. Liguine, élève de Tchebicheff, a donné du problème une solution indépendante de celle du colonel Peaucellier. M. Liguine a exposé ses recherches dans le *Bulletin de Saint-Pétersbourg* de 1871 et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XIV, Paris, 1875, p. 529-560). La Communication adressée à ce dernier Recueil a été reproduite en substance dans le *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik* (Erster Band, Leipzig, 1877, p. 95-101).

(¹) Voir : *Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications*, par M. Saint-Loup, dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs*, 1875. — *Over stangenstelsels meer in het byzonder over het zesstangenstelsels of de mit van Peaucellier*, door J.-D.-C.-M. de Roos, dans le *Tijdschrift van het konijnklijk Istituted van Ingenieurs*, 1875-1876, Te's Gravenhage, 1876, traduit en français par M. Alb. Kapteyn et inséré dans la *Revue universelle des Mines* (1877) sous le titre suivant : *Aperçu cinématique de différents systèmes de tringles articulées, et en particulier du dispositif de M. le colonel Peaucellier*. — *Einige mededeelingen en Opnerknigen over stangenstelsels* door J.-D.-C.-M. de Roos, dans le *Tijdschrift*, etc., 1876-1877, Te's Gravenhage, 1877.

nités A, B, A′, C. Les sommets opposés A et A′ sont en outre liés à rticulation aux extrémités de deux tirants d'égale longueur, qui nt leur commune origine sur le pivot de rotation O. Les tirants euvent être plus longs (*fig.* 52) ou plus courts (*fig.* 53) que les iges et, selon que l'une ou l'autre condition se trouve réalisée, le oint O est intérieur ou extérieur au losange. Les segments OB, OB′ sont de même sens dans le premier cas et de sens opposés lans le second.

Abaissons du sommet A la perpendiculaire AE sur BC, désignons par m la longueur des tirants, par n celle des tiges et posons, dans le cas de la *fig.* 52, $OB = +u$, $OC = +v$. Nous aurons

$$BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(v - u),$$

$$m^2 = \overline{AE}^2 + \left[u + \frac{1}{2}(v - u)\right]^2,$$

$$n^2 = \overline{AE}^2 + \frac{1}{4}(v - u)^2,$$

d'où

$$m^2 - n^2 = uv. \tag{1}$$

Faisons, dans le cas de la *fig.* 53, $OB = -u$, $OC = +v$. Nous aurons alors

$$BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(u + v),$$

$$m^2 = \overline{AE}^2 + \left[\frac{1}{2}(u + v) - u\right]^2,$$

$$n^2 = \overline{AE}^2 + \frac{1}{4}(u + v)^2,$$

et par suite

$$m^2 - n^2 = -uv. \tag{2}$$

On voit par les équations (1) et (2) que le produit des segments OB et OC est constant, quel que soit le mouvement du système. La différence $m^2 - n^2$ est appelée *module*. Elle est positive ou négative et le système lui-même est *positif* ou *négatif*, selon que le point O est intérieur ou extérieur au losange.

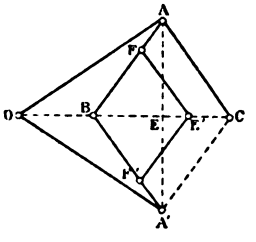
On trouve souvent commode de multiplier l'équation (2) par -1

et de considérer le module comme une différence toujours positive, exprimée par $m^2 - n^2$ ou par $n^2 - m^2$, selon que m est plus grand ou plus petit que n. La différence entre les deux systèmes positif et négatif consiste donc uniquement dans la communauté ou l'opposition de sens des segments OB et OC. Si l'on représente le module par μ^2, on aura, pour l'un et l'autre cas,

$$uv = \mu^2. \tag{3}$$

Avant de passer aux applications de ces deux systèmes, nous donnerons quelques indications touchant l'appareil modifié que M. Sylvester a nommé *extracteur binôme quadratique*. Cet appareil permet de simplifier notablement l'exécution mécanique d'une partie des opérations de calcul dont nous aurons à nous occuper plus loin.

Fig. 54.



Supposons que, dans la *fig.* 52, on transporte les côtés AC et A'C du losange parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce que leur point d'intersection vienne occuper une nouvelle position quelconque E' (*fig.* 54) sur la droite BC. Si l'on accouple alors les quatre tiges en F et en F', comme l'indique la figure, on obtient un nouveau losange dans lequel $BF = BF' = n'$, $OE' = p$, $BE' = q$, et l'on a

$$\frac{BE'}{BC} = \frac{BF}{BA} \quad \text{ou} \quad \frac{q}{v-u} = \frac{n'}{n},$$

d'où

$$q = \frac{n'}{n}(v-u),$$

$$p = u + q = u + \frac{n'}{n}(v-u),$$

$$p + q = u + 2\frac{n'}{n}(v-u),$$

$$p - q = u,$$

et par suite

$$p^2 - q^2 = u^2\left(1 - 2\frac{n'}{n}\right) + 2\frac{n'}{n}uv = u^2\left(1 - 2\frac{n'}{n}\right) + 2\frac{n'}{n}\mu^2.$$

Si le point E' vient à coïncider avec le point d'intersection E des

diagonales du losange (*fig.* 55), on a

$$n' = \frac{1}{2}$$

et

$$(4) \qquad p^2 - q^2 = \mu^2.$$

Si l'on opère la même modification sur la *fig.* 53, pour passer à la *fig.* 56, il faut remplacer $p^2 - q^2$ par $q^2 - p^2$, à moins qu'on ne veuille attribuer à μ^2 une valeur négative.

Fig 55.

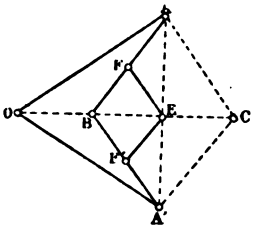
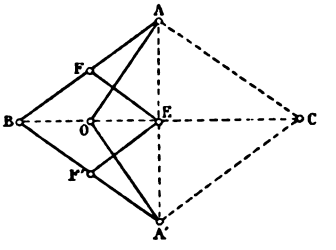


Fig. 56.



L'une des plus simples applications du système articulé, positif ou négatif, est celle qui consiste à déterminer le rapport inverse d'un rapport donné. Supposons qu'on adapte à la droite OC une échelle dont le zéro soit au point O et dont l'unité de longueur soit égale à μ. Le point C marquera la longueur inverse de OB. L'équation (3) donne en effet

$$OB \times OC = \mu^2 \quad \text{ou} \quad \frac{OC}{\mu} = \frac{1}{\frac{OB}{\mu}},$$

d'où il suit que le nombre $\frac{OC}{\mu}$ est l'inverse de $\frac{OB}{\mu}$.

Le système disposé en vue de cette application prend le nom de *réciprocateur*.

Le système négatif comporterait que l'échelle fût prolongée de droite à gauche au delà de zéro.

Si l'on adoptait une nouvelle unité de longueur λ, la valeur de OC représenterait $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2$ fois la valeur inverse de OB.

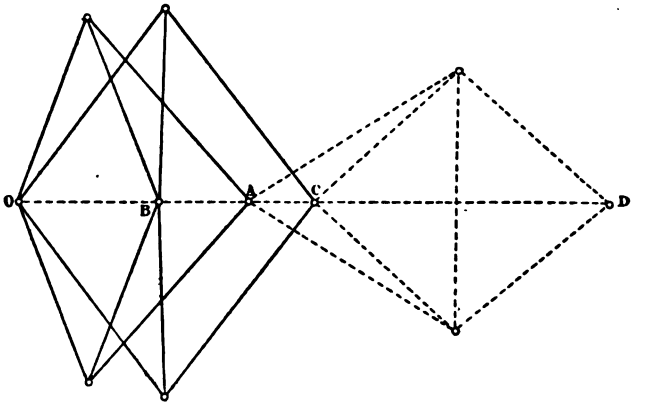
En se fondant sur l'équation (4) transformée, soit

$$OE = \sqrt{\overline{EB}^2 + \mu^2},$$

et en faisant usage de l'appareil indiqué par la *fig.* 55, on effectuera d'une manière analogue l'extraction de la racine carrée d'un binôme quadratique à une variable. Dans ce cas, toutefois, le point E doit coïncider avec le zéro de l'échelle, et les tirants doivent être disposés de telle façon que la valeur de OC puisse varier avec leur longueur. On peut prendre d'ailleurs pour unité de l'échelle une grandeur quelconque. Il suffit que μ soit exprimé en fonction de cette unité.

L'élévation au carré et l'extraction de la racine carrée exigent

Fig. 57.



une combinaison assez complexe, dans laquelle entrent quatre éléments simples de Peaucellier et trois éléments modifiés de Sylvester. Nous ne croyons pas utile d'entrer dans les détails de cette disposition, qui présente un intérêt purement théorique (¹).

L'extraction de la racine cubique peut être faite au moyen d'un système beaucoup plus simple, composé de trois éléments (*fig.* 57). Ces éléments ayant le même module μ^2, si l'on fait $OA = x$, on

(¹) Voir *Revue scientifique*, 4e année, 2e série, 21 novembre 1874, p. 490-498.

a successivement

$$AB = \frac{\mu^2}{x}, \qquad OB = OA - AB = \frac{x^2 - \mu^2}{x},$$

$$BC = \frac{\mu^2}{OB} = \frac{\mu^2 . x}{x^2 - \mu^2}, \qquad AC = BC - AB = \frac{\mu^4}{x(x^2 - \mu^2)},$$

$$AD = \frac{\mu^2}{AC} = \frac{x}{\mu^2}(x^2 - \mu^2), \quad OD = OA + AD = \frac{x^2}{\mu^2};$$

donc

$$\frac{OD}{\mu} = \left(\frac{x}{\mu}\right)^3,$$

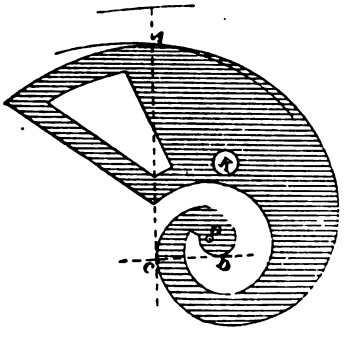
et, pour $\mu = 1$,

$$OD = x^3.$$

XII. — Gabarit de Steiner.

80. Nous signalerons enfin un instrument simple et commode, imaginé par M. le professeur Fried. Steiner pour faciliter la construction de la spirale logarithmique et l'application de cette courbe au calcul graphique. La *fig.* 58 représente cet instrument

Fig. 58.



réduit à l'échelle de $\frac{1}{5}$. Le centre de la courbe peut être marqué sur le papier au moyen d'une pointe qu'on fait passer à travers une petite lumière pratiquée au point O. Au centre de gravité K est un bouton de prise. L'appareil sert à divers usages :

1° La courbe présente une série de courbures dont les rayons croissent avec continuité, et elle se prête mieux que toute autre

forme aux raccordements qu'on peut avoir à effectuer entre des courbes quelconques.

2° Une portion de courbe étant donnée, on en peut trouver rapidement le centre de courbure sans se servir du compas. Si, par exemple, la courbe du dessin est couverte en A par celle de l'instrument, on mènera du point A la tangente AC au plus prochain contour du gabarit et le point de contact C sera le centre de courbure cherché. On déterminera le point C avec une exactitude complète, soit en élevant sur AC la perpendiculaire CD, tangente au plus prochain contour de l'instrument, soit en considérant que OC est, par construction, perpendiculaire sur AO.

3° On peut construire rapidement la développée d'une courbe donnée, sans faire usage du compas et de la règle.

4° On peut utiliser le gabarit comme instrument de calcul.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES AIRES A CONTOUR RECTILIGNE.

COUSINERY. *Le Calcul par le trait.* Paris, 1840, p. 64-82. — CULMANN. *Die graphische Statik.* Zurich, 1856 et 1875, n° 5-7. — SCHLESINGER. *Vorträge über grafisches Rechnen und Grafostatik.* Wien, 1868-1869, n°s 59-83. — REULEAUX. *Der Constructeur.* Braunschweig, 1869, § 25-27. — V. OTT. *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik,* etc. Vierte Auflage, Prag, 1879, § 10. — LÉVY. *La Statique graphique,* etc. Paris, 1874, § 15. — CREMONA. *Elementi di Calcolo grafico.* Torino, 1874, § 12-22 et § 92-100. — WENCK. *Die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf die Geometrie.* Berlin, 1879, VI.

I. — Principe des signes appliqué aux aires (1).

81. Un point qui se meut d'un mouvement continu dans un plan décrit un *circuit* ou *périmètre* fermé lorsque sa dernière position vient coïncider avec sa position initiale.

(1) La règle des signes appliquée aux aires a été établie pour la première fois, dans toute sa généralité, par MÖBIUS (*Der barycentrische Calcul,* etc., Leipzig, 1827, § 17, 18 et *passim.* — *Lehrbuch der Statik,* Leipzig, 1837, § 34). On trouve, toutefois, d'intéressants matériaux pour l'étude de cette question dans un Mémoire de MONGE (XVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* p. 68). Les premières notions sur les signes des aires, spécialement dans les figures à périmètres croisés, on été données par MEISTER (*Generalia de genesi figurarum planarum et independentibus earum affectionibus,* dans les *Novi Commentarii Societatis regiæ Scientiarum Gottingensis,* t. I, ad n. MDCCLXIX et MDCCLXX, p. 150). — LEXELL (*Solutio problematis geometrici ex doctrina sphæricorum,* dans les *Acta Academiæ Scientiarum imperialis Petropolitanæ,* 1781, I, p. 126 et suiv.) et L'HUILLIER (*De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum Geometriæ considerata,* Varsoviæ, 1782, p. 23) ont aussi jeté quelque lumière sur ce sujet.

C'est ici le cas de rappeler la célèbre formule de GAUSS, au moyen de laquelle, connaissant les coordonnées des sommets $x, y; x', y'; x'', y''; \ldots, x^{n-1}, y^{n-1}$, on peut calculer l'aire de tous les polygones déterminés par l'équation

$$A = \tfrac{1}{2}[x(y' - y^{n-1}) + x'(y'' - y) + x''(y''' - y') + \ldots + x^{n-1}(y - y^{n-2})].$$

Cette formule a été publiée pour la première fois dans la traduction allemande de la

Le circuit est *polygonal* ou *rectiligne* quand il est formé de segments de droites ayant chacun son origine à l'extrémité du segment qui le précède et son extrémité à l'origine du segment qui le suit.

Le circuit peut être tel que le point mobile qui le décrit n'occupe jamais deux fois une même position quelconque. Mais il peut arriver aussi que le circuit se coupe lui-même. Il prend alors le nom de *circuit croisé* ou *entrelacé* et les points d'intersection sont appelés *nœuds*.

Si le mobile, partant d'un certain point A, passe successivement par les points B, C, D du circuit avant de revenir à son point initial, on désigne le chemin parcouru par ABCD. Si le mobile rencontre les mêmes points dans l'ordre D, C, B, on désigne par ADCB le chemin parcouru en sens opposé sur le même circuit.

Tout point du plan, constamment situé à la droite de l'observateur qui parcourt un segment déterminé de l'un des deux chemins, est constamment à la gauche de l'observateur qui parcourt le même segment dans le sens de l'autre chemin.

L'origine du mouvement étant arbitraire, les expressions ABCD, BCDA, ... désignent un seul et même chemin, opposé de sens à celui qu'on peut désigner indifféremment par ADCB, DCBA, ...

Un périmètre fermé et sans nœuds circonscrit une portion finie du plan, qui lui est intérieure, et la sépare de toute la partie extérieure, qui s'étend à l'infini. La mesure de la partie intérieure constitue l'*aire* du circuit.

Lorsqu'une droite pivote dans un plan sur un de ses points O supposé fixe et lorsque, par suite, un autre point A de la droite

---

Géométrie de position de CARNOT (*Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie*, deutsch v. SCHUHMACHER, 2. Theil, Altona, 1810, p. 362). Mais c'est encore dans les travaux de MÖBIUS qu'il faut chercher la première étude complète sur les signes des aires dans les figures à contours croisés (voir, outre les deux Ouvrages cités plus haut, *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, dans les *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, t. 15, p. 42 et suiv. et *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyëders*, dans le même Recueil, t. 17). Consulter sur la même question : *Die Elemente der Mathematik*, von Dr RICHARD BALTZER, II. Bd., dritte verbesserte Auflage, Leipzig, 1870, p. 65-68, et *Vermischte Untersuchungen für Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, von Dr SIEGMUND GÜNTHER, Leipzig, 1876, p. 1-92.

mobile décrit une circonférence, on convient de considérer comme *positifs* ou comme *négatifs*, d'une part l'arc circulaire décrit par le point A, d'autre part l'aire décrite par la droite OA, selon qu'un observateur placé au-dessus du plan verra cette droite se mouvoir dans le même sens que les aiguilles d'une montre ou dans le sens opposé. Le premier des deux mouvements détermine, par convention, le *sens positif du plan*, l'autre le *sens négatif*.

82. Soient A, B, C les sommets d'un triangle, placés de telle façon qu'un observateur, parcourant le périmètre dans le sens positif et à partir de A, passe par B avant d'arriver à C. L'observateur aura constamment à sa droite l'aire ABC, que l'on convient de considérer comme positive. Si le mouvement avait lieu dans le sens négatif du plan, l'observateur aurait à sa gauche l'aire négative ACB, égale et opposée à la première.

L'aire positive ABC peut être considérée comme engendrée par la droite AB, de longueur variable, pivotant sur le sommet A et dans le sens positif du plan, pendant que le point B parcourt le chemin rectiligne BC. L'aire égale et opposée ACB sera pareillement décrite par la droite AC, pivotant dans le sens négatif sur le même point A, pendant que le point C parcourt le chemin CB.

83. Soit O un point quelconque, pris dans le plan du triangle ABC. On a identiquement, en observant les règles que nous venons de poser,

$$OAB + OBC + OCA = ABC.$$

Cette propriété apparaît immédiatement lorsque le point O est pris à l'intérieur du triangle ABC, car les triangles partiels OAB, OBC, OCA sont de même signe et leur somme est égale à ABC.

Si le point O est dans l'angle BAC, mais en dehors du triangle donné et dans la partie du plan séparée du sommet A par la droite BC, les aires des triangles OAB, OCA sont de même sens et celle du triangle OBC est de sens contraire, en sorte qu'on a, d'après la règle des signes,

$$OAB + OBC + OCA = OAB - OCB - OCA = ABC.$$

Enfin, si le point O est dans l'angle opposé par le sommet à BAC,

on a

$$OAB + OBC + OCA = -OBA + OBC - OAC = ABC.$$

Il suit de là qu'on peut considérer l'aire du triangle ABC comme engendrée par le mouvement d'un rayon de longueur variable, dont un point O reste fixe, tandis que son extrémité décrit le périmètre du triangle d'un mouvement continu et dans le sens donné.

La propriété qui précède s'étend aux cas où des arcs de courbe seraient substitués à un ou à plusieurs des côtés rectilignes.

84. Soit ABC ... MNA un circuit polygonal quelconque, plan et fermé. Les aires des triangles déterminés par ses divers côtés et par un point O du plan forment une somme constante, quel que soit O.

En effet, P étant un autre point du plan, on a (82)

$$\begin{aligned} PAB &= OAB + OBP + OPA, \\ PBC &= OBC + OCP + OPB, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ PMN &= OMN + ONP + OPM, \\ PNA &= ONA + OAP + OPN. \end{aligned}$$

Si l'on additionne ces égalités, en supprimant dans le second membre les termes égaux et de sens opposés, il vient

$$\begin{aligned} &PAB + PBC + \ldots + PMN + PNA \\ &= OAB + OBC + \ldots + OMN + ONA = \Sigma. \end{aligned}$$

On peut considérer l'aire constante Σ comme engendrée par le mouvement d'un rayon de longueur variable, pivotant sur le point O, pendant que son extrémité décrit le contour donné dans le sens donné.

85. Tout circuit fermé et croisé divise le plan en un certain nombre de parties finies et contiguës, φ_1, φ_2, φ_3, ..., limitées chacune par un circuit partiel, fermé et non croisé. La totalité du plan de la figure se compose de ces parties et d'un résidu illimité φ_0, qui leur est extérieur.

Soient O un point du plan pris comme pivot, A un point mobile

décrivant le circuit, OA_1 et OA_2 les côtés de l'angle infiniment petit formé par les deux positions de la droite mobile OA qui embrassent un élément ω du plan, infiniment petit dans toutes les directions et situé entre O et A_1. Le sens du mouvement étant supposé tel que le point A occupe la position A_1 avant d'occuper la position A_2, on dit que l'intersection A_1 du circuit et du rayon $O\omega$ prolongé est positive ou négative selon que l'aire du triangle A_1OA_2 est décrite dans le sens positif ou dans le sens négatif du plan. Si la description complète du circuit par le point A donne lieu à m intersections positives et à n intersections négatives, l'élément ω appartient à $m+n$ triangles ou secteurs élémentaires, tels que A_1OA_2, dont m ont des aires positives et n des aires négatives. L'élément ω entre donc avec le coefficient $m-n$ dans la somme Σ des $m+n$ triangles. On vérifie aisément que le coefficient $m-n$ de ω est indépendant de la position du point O.

86. Soient ω et ω' deux éléments infiniment petits, appartenant à un même circuit partiel non croisé φ, et tels qu'aucune partie du circuit total ne soit coupée par le segment de droite qui les joint. Si le point de pivotement O est pris sur l'un des prolongements de ce segment, il est évident que le rayon OA ne pourra pas décrire ω sans décrire en même temps ω'. Les deux éléments ω et ω' entrent donc dans Σ avec le même coefficient. Ce coefficient est commun à tous les éléments du circuit partiel φ et constitue conséquemment le coefficient particulier à ce circuit.

Soient maintenant ω et ω'' deux éléments infiniment petits, situés dans deux circuits partiels contigus, c'est-à-dire tels que le circuit total donné passe une seule fois entre ω et ω''. Nous admettons qu'un observateur parcourant le circuit dans le sens donné aurait ω à sa droite et ω'' à sa gauche au moment où il rencontrerait la droite $\omega\omega''$, après avoir quitté une certaine position F, mais avant d'avoir atteint une autre position G. Si l'on prend le point de pivotement O sur le prolongement de $\omega''\omega$, c'est-à-dire au delà de ω par rapport à ω'', le rayon OA ne pourra pas décrire une seule fois ω'' sans décrire en même temps ω; mais, lorsque A parcourra la partie FG du circuit, et dans ce cas seulement, OA décrira ω sans décrire ω''. Le coefficient de ω, c'est-à-dire du circuit partiel qui contient cet élément, dépassera donc d'une unité le

coefficient de ω'' et du circuit dont ω'' fait partie. Mais les circuits partiels de ω et de ω'' sont respectivement à la droite et à la gauche de l'observateur qui parcourt le circuit dans le sens convenu FG. Donc, si l'un passe d'une aire partielle à une aire contiguë en traversant le circuit de droite à gauche, le coefficient de l'aire d'où l'on sort est supérieur d'une unité au coefficient de l'aire dans laquelle on entre.

87. La région infinie φ_0 a pour coefficient zéro, car on peut toujours attribuer au point O une position telle que le segment mobile OA ne rencontre pas un élément ω_0 de cette région.

Si, partant de φ_0, on pénètre successivement dans les circuits partiels, on formera le coefficient de chacun d'eux en augmentant ou en diminuant d'une unité le coefficient du circuit précédent, selon que, pour passer de celui-ci dans l'autre, on aura dû quitter la droite du périmètre pour en occuper la gauche, ou *vice versa*.

En général, si un point de la région φ_0 est joint à un point d'un circuit partiel φ par une droite qui traverse le circuit total m fois de droite à gauche et n fois de gauche à droite, le coefficient de φ est $m - n$.

Si $c_1, c_2, \ldots$ sont les coefficients respectifs des circuits partiels, non croisés, dont les aires sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, on a

$$\Sigma = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots.$$

Lorsque le périmètre ne présente aucun croisement, il ne donne lieu qu'à un seul circuit limité φ_1, dont le coefficient est l'unité positive ou négative, selon que le chemin est de sens positif ou négatif. On a dans ce cas $\Sigma = \pm\varphi_1$, c'est-à-dire que, le périmètre n'ayant aucun croisement, la somme Σ exprime l'aire que ce périmètre circonscrit.

On a été naturellement conduit par cette propriété à prendre la quantité Σ comme définition de l'aire d'un circuit croisé quelconque.

II. — Représentation des aires par des droites. Réduction d'un triangle à une base donnée [1].

88. Une aire pouvant être considérée comme le produit de deux longueurs, les règles de la Géométrie plane et celles que nous avons précédemment exposées permettront de déterminer par une simple multiplication graphique l'aire d'une figure donnée quelconque.

L'aire considérée, résultant du produit de deux droites, peut en effet être divisée par une longueur arbitraire, mais constante, b, que nous appellerons *base de réduction* et que, pour simplifier, nous prendrons le plus souvent égale à l'unité. La question revient dès lors à effectuer le produit d'une droite par un rapport, et nous savons comment on procède en pareil cas.

Par exemple, l'aire d'un triangle OAB, de base a et de hauteur h, a pour expression

$$A = \frac{1}{2} ah.$$

Divisant cette aire par la base b, nous obtenons comme quotient une droite f, telle que

$$f = \frac{A}{b} = a\frac{h}{2b} = h\frac{a}{2b}.$$

Il s'agit donc de multiplier a par le rapport $\frac{h}{2b}$ ou h par le rapport $\frac{a}{2b}$.

Dans le premier cas (*fig.* 59) on prend $OC = 2b$, on joint BC et on mène AD parallèle à BC.

Dans le second cas (*fig.* 60) on détermine sur OB le point D, situé à la distance $2b$ de OA, on joint AD et on mène BC parallèle à DA.

---

(1) La résolution de ce problème remonte à l'École de Pythagore. Hankel l'énonce ainsi : « Einen gegebenen Flächenraum an einer gegebenen Strecke zu entwerfen (παραβάλλειν, *applicare*), d. h. in ein Rechteck zu verwandeln, dessen eine Seite jene gegebene Strecke ist. » (Voir *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, Leipzig, 1874, p. 98-99). L'auteur de cette assertion, que Hankel ne désigne pas, est Eudème. Voir à ce sujet : *De gli elementi d'Euclide libri quindici.* [illegible] Federico Commandino, Urbino. MDLXXV, c. 28.

La construction donne, dans chacun des deux cas, deux triangles semblables ADO, CBO, dont les hauteurs sont entre elles comme les bases. On a donc

$$f : h = a : 2b.$$

On peut vérifier, par des considérations géométriques directes, que les multiplications ainsi effectuées conduisent à déterminer

Fig. 59.

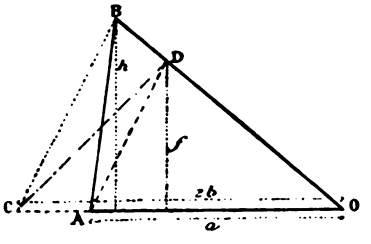
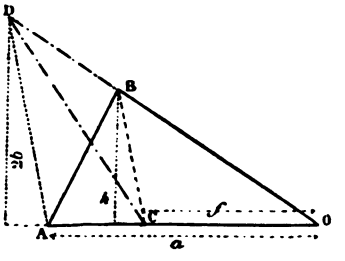


Fig. 60.



exactement l'aire du triangle AOB. Menons en effet la droite CD. Les droites AD et BC étant parallèles, les triangles OAB, OCD sont équivalents, et, dans chacune des constructions, l'aire du triangle OAB est

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2bf = bf,$$

d'où

$$f = \frac{A}{b}.$$

L'aire A est donc proportionnelle à la hauteur f d'un rectangle de base b. Nous avons obtenu f aussi bien par la transformation graphique du triangle que par une multiplication graphique, et les deux procédés concordent parfaitement.

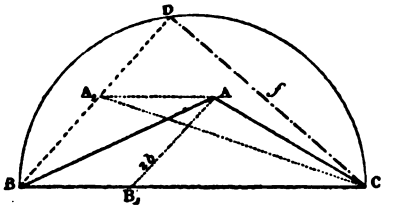
Une telle concordance est difficile à établir quand il s'agit de figures compliquées. On évite alors d'opérer par voie de sommation des triangles partiels dont la figure se compose, et l'on procède directement à la transformation de l'aire proposée.

L'aire d'une figure quelconque, dont on veut avoir la mesure, peut être transformée soit en un rectangle de base b, soit en un triangle ayant pour base ou pour hauteur $2b$. On obtient par ces transformations des segments de droites proportionnels aux aires

proposées, et ces segments peuvent être assujettis à toutes les opérations graphiques que nous avons précédemment indiquées. On voit par là que la réduction d'une figure à une base donnée équivaut à la détermination de l'aire de cette figure.

89. On est quelquefois tenu d'adopter comme base une droite AB (*fig.* 61) menée de l'un des sommets A du triangle donné à un point B_1 du côté opposé BC. On doit, en ce cas, prendre pour hauteur f la projection orthogonale CD du côté BC sur une droite perpendiculaire à AB_1.

Fig. 61.



Menons, en effet, AA_1 parallèle à CB, et remplaçons ABC par le triangle équivalent A_1BC, dans lequel le côté A_1B est égal et parallèle à AB_1. Le triangle A_1BC a pour hauteur la corde CD du demi-cercle BDC.

La plus grande valeur possible de CD est CB. Elle correspond à la plus petite valeur de AB_1, c'est-à-dire à la hauteur du triangle ABC. Si l'on fait pivoter AB_1 sur le sommet A, la longueur de ce segment varie depuis le minimum que nous venons d'indiquer jusqu'à l'infini. En même temps, le point D décrit le demi-cercle BDC et la corde CD varie depuis CB jusqu'à zéro. On peut donc prendre arbitrairement comme base de réduction toute longueur plus grande que la hauteur du triangle donné et comme hauteur relative à cette base toute longueur plus petite que la base BC.

Si l'on assigne à l'une des droites CD, AB_1 une longueur $2b$, égale au double de la base, l'autre droite représentera la valeur f proportionnelle à l'aire.

Pour distinguer les projections de BC sur CD et sur AB_1, on donne à la première le nom d'*antiprojection*.

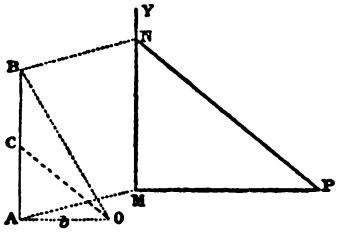
89. Nous indiquerons encore quelques constructions auxquelles il est souvent commode de recourir dans la transformation des aires.

Soit à transformer un triangle rectangle OAB (*fig.* 62) en un rectangle de même aire et de base donnée b.

Menons parallèlement à OA le segment $PM = 2b$ et parallè-

lement à AB la droite indéfinie MY. La parallèle à AM passant par le point B rencontre MY en N, et la parallèle à PN passant par le point O rencontre AB en C; AC est la hauteur du rectangle cherché.

Fig. 62.



En effet, les triangles semblables MNP, OAC donnent

$$\frac{2b}{MN} = \frac{OA}{AC},$$

d'où

$$2b.AC = OA.MN,$$

et, comme MN = AB,

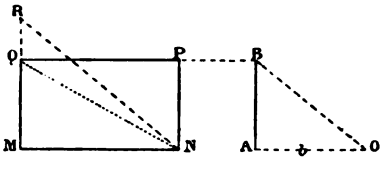
$$b.AC = \tfrac{1}{2}\,OA.AB.$$

On simplifie la construction en plaçant PM = $2b$ sur le prolongement de OA.

Ce procédé est surtout commode quand il s'agit de transformer plusieurs triangles rectangles en autant de rectangles ayant une même base.

Soit maintenant à transformer un rectangle MNPQ (*fig.* 63) en un autre, de base donnée.

Fig. 63.



On mène la diagonale NQ, et, au moyen du triangle auxiliaire OAB, on transforme le triangle MNQ, moitié du rectangle proposé, en un autre de base AO. Le point d'intersection R de la droite MQ

prolongée et de la parallèle à OB passant par N, détermine la hauteur MR du nouveau rectangle cherché.

Ce procédé permet de réduire plusieurs rectangles à une même base par une application très simple du polygone de multiplication (23) (¹).

III. — Réduction d'un quadrangle à une base donnée.

90. Soit à réduire à la base b un quadrangle ABCD (*fig.* 64). On mène BB_1 parallèle à la diagonale CA. Le quadrangle étant ainsi transformé en un triangle équivalent B_1CD, on trace $CF = 2b$, et l'on détermine l'antiprojection (88) correspondante B_1E du

Fig. 64.

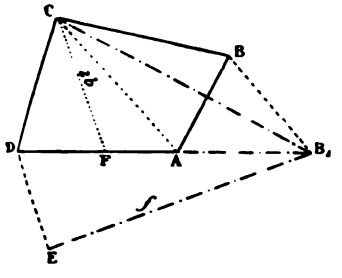
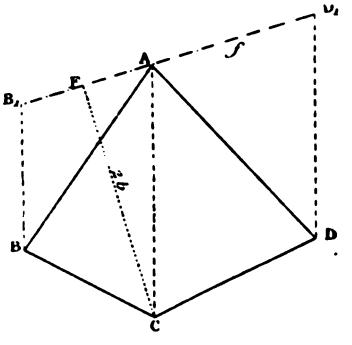


Fig. 65.



côté B_1D. Cette antiprojection donne la mesure f du quadrangle.

On peut opérer la réduction directement de la manière suivante.

Du point C comme centre (*fig.* 65), avec $CF = 2b$ pour rayon, on décrit un arc de cercle, et l'on mène du point A la tangente AF à cet arc. Les parallèles à la diagonale CA qui passent par les sommets B et D rencontrent AF aux points B_1 et D_1. Aux triangles ABC, ACD on peut substituer les triangles équivalents

(¹) On peut opérer la transformation des aires par un grand nombre d'autres constructions que nous croyons inutile d'exposer ici. Ces constructions se déduisent aisément des règles ordinaires de planimétrie et de la méthode générale précédemment développée.

AB_1C, ACD_1, qui ont respectivement B_1A, AD_1 pour bases correspondantes à la hauteur commune CF.

L'aire du quadrangle est dès lors représentée par B_1D_1.

Cette construction n'est plus possible lorsque CF dépasse la plus grande dimension du quadrangle ABCD. Dans ce cas (*fig.* 66) on mène BB_1 parallèle à CA, et du point D comme centre, avec $2b$ pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe BB_1 en B_1. L'aire est alors mesurée par l'antiprojection CF de la diagonale AC.

Si le quadrilatère est croisé (*fig.* 67), la construction ne donne

Fig. 66.

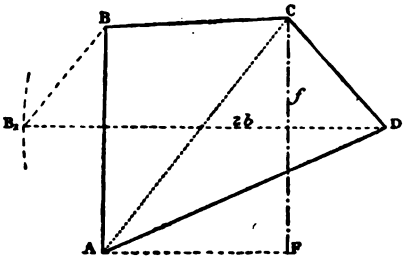
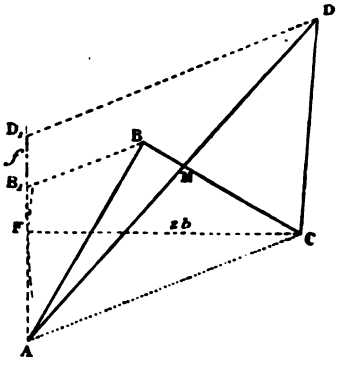


Fig. 67.



plus la somme, mais la différence des triangles ABC, ACD, qui ont la diagonale AC commune. Les bases AB_1, AD_1 se superposent du même côté du sommet A, et la plus grande, AD_1, correspond au triangle ACD, qui a la plus grande aire.

Si les sommets B et D sont sur une parallèle à AC, les extrémités B_1, D_1 des deux bases coïncident et $f = 0$. Dans ce cas, en effet, l'aire du quadrangle est égale à la somme des aires triangulaires MAB, MCD, lesquelles sont égales, mais de signes contraires.

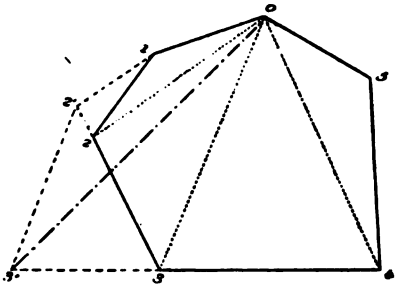
IV. — Réduction d'un polygone quelconque à une base donnée

91. Pour déterminer l'aire d'un polygone quelconque, à circuit croisé ou non croisé, ou pour réduire ce polygone à une base

donnée, on le transforme d'abord en un quadrangle équivalent [1].

Soit 012345 le polygone proposé (*fig.* 68). On mène par le sommet 1, parallèlement à la diagonale 02, la droite 12′, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre au point 2′ avec le côté 23. Les triangles 012, 02′2 sont équivalents, et il en est de même des polygones 012345, 02′345. Le sommet 1 est ainsi éliminé et le nou-

Fig. 68.



veau polygone a un sommet de moins que le précédent. On élimine de la même manière le nouveau sommet 2′ en menant 2′3′ parallèle à la diagonale 03. On arrive ainsi à transformer un polygone d'un nombre quelconque de côtés en un quadrangle, qui est 03′45 dans le cas de la figure. Appliquant à ce quadrangle les constructions précédemment indiquées, on détermine le segment f tel que le produit fb soit égal à l'aire du polygone proposé.

92. Dans la construction précédente, les nouveaux côtés des polygones, résultant des réductions successives, sont des rayons issus d'un même centre ou sommet fixe o. Mais on peut remplacer le sommet fixe où convergent les nouveaux côtés par un côté fixe sur lequel s'alignent les nouveaux sommets.

---

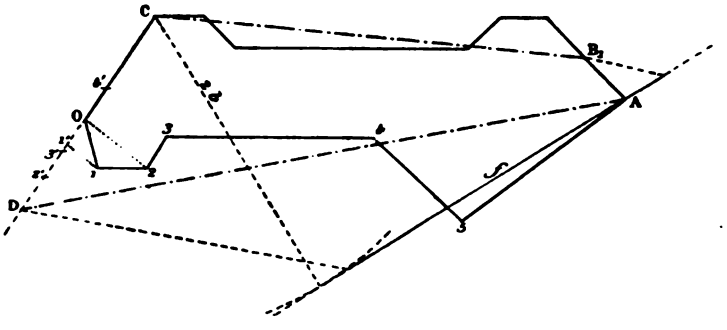
[1] Cette question est traitée avec beaucoup de détail dans le Mémoire déjà cité de Meister. Elle fait le sujet d'un Chapitre entier portant ce titre : *Figuræ rectilineæ cujus perimeter exhibetur, æquale triangulum construere, cujus vertex et latus oppositum dantur positione in plano figuræ, ita tamen, ut vertex non sit in trium vel plurium laterum rectis.* On en trouve une étude encore plus détaillée, et peut-être même un peu prolixe, dans un Mémoire de D. Leoncio Ubillos, intitulé *Explanacion de un camino. Procedimientos graficos para la cubicacion, reparto en la linea de los productos de las excavaciones, y calculo de las distancias medias de trasportes.* Madrid, 1875, p. 5-31.

Considérons, par exemple, le circuit ACO12345 (*fig.* 69) et menons

11′	parallèle à	20	jusqu'à la rencontre de OC.
22′	»	31′	
33′	»	42′	
44′	»	53′	
5D	»	A4′	

Nous avons ainsi déterminé une droite AD, qui peut être sub-

Fig. 69.



stituée à la partie inférieure A54321O du profil. On substitue de la même manière la droite CB_1 à la partie supérieure, et le profil polygonal tout entier se trouve transformé en un quadrilatère équivalent AB_1CD. On réduit celui-ci à la base $2b$ pour déterminer le segment f, dont le produit par b donne l'aire de la figure proposée.

93. La méthode précédente est la plus commode à appliquer quand les aires à déterminer se rapportent à des contours polygonaux très accidentés. Elle s'applique aux circuits entrelacés aussi bien qu'aux autres, elle permet d'avoir égard aux signes des aires partielles, et il suffit d'un peu d'exercice pour effectuer les transformations d'une manière en quelque sorte mécanique.

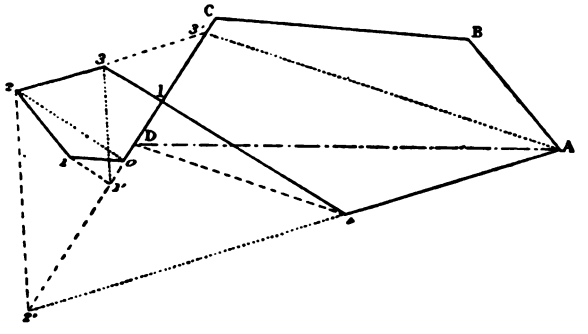
Soit, par exemple, à réduire par cette méthode le périmètre croisé ABC01234 (*fig.* 70), qui peut être censé représenter un profil de terrassement, partie en déblai, partie en remblai. On

mène

11′	parallèle à	20	jusqu'à la rencontre du côté Co
22′	»	31′	
33′	»	42′	
4D	»	A3′	

Le polygone donné est transformé en un quadrilatère équivalent ABCD, qui donne la différence entre les aires de signes con-

Fig. 70.



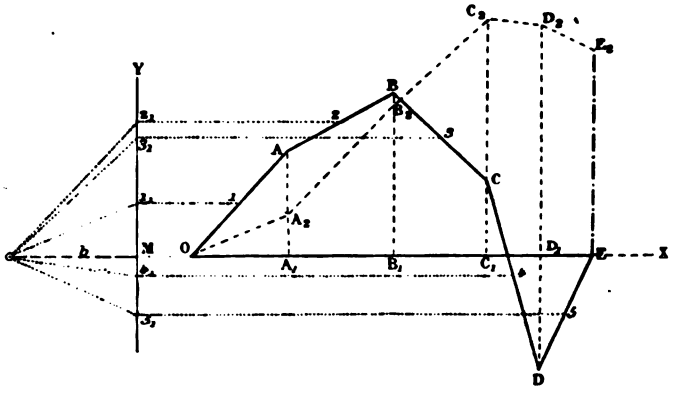
traires ABCI4, I0123, représentant, l'une la section en remblai, l'autre la section en déblai.

Le circuit ABCD est de même sens que ABCI4 ou de même sens que I0123, selon que l'aire du remblai l'emporte sur celle du déblai, ou *vice versa*.

94. Le même problème est susceptible d'une solution différente. Soit en effet (*fig.* 71) une aire quelconque, limitée par un contour polygonal OABCDE et par une droite OX. On la décompose, au moyen de perpendiculaires abaissées des sommets du contour sur OX, en une suite de triangles et de trapèzes transformables, par voie de réduction, à la base *b* d'un rectangle. A ces figures partielles on substitue des rectangles équivalents en prenant les milieux 1, 2, 3, 4, 5 des côtés du contour polygonal. On projette ces points sur une droite MY, parallèlement à la droite fondamentale OX. La suite de la construction est suffisamment indiquée par la figure. La transformation des rectangles équivalents aux triangles et aux trapèzes partiels est effectuée au moyen du polygone de multipli-

cation $OA_2B_2C_2D_2E_2$ (23), et l'aire de la figure proposée est égale au produit de la base b par le segment EE_2. La partie de cette aire qui est située au-dessous de la droite OX est affectée du signe contraire à celui de l'autre partie. La mesure de l'aire partielle comprise

Fig. 71.



entre les ordonnées de deux sommets du contour proposé est égale au produit de la base constante b par la différence des ordonnées correspondantes du polygone de multiplication. Par exemple,

$$\text{aire } A_1ABB_1 = b(B_2B_1 - A_2A_1),$$
$$\text{aire } A_1ABCC_1 = b(C_2C_1 - A_2A_1),$$

et ainsi de suite.

CHAPITRE V.

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES.

COUSINERY. *Le calcul par le trait.* Paris, 1839. IIIe Partie. — CULMANN. *Die graphische Statik.* Zürich, 1875, nos 13-14. — HELMERT. *Zur Herstellung graphischer Tabellen mit zwei Eingängen.* Stuttgard, 1876. — LALANNE. *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique,* etc. (*Annales des Ponts et Chaussées,* 2e série, 1846, 1er sem., p. 1). — *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables,* etc., Paris, Imp. nat., 1878 et 1880. — SCHLESINGER. *Vorträge über grafisches Rechnen u. Grafo-Statik.* Wien, 1868-1869, nos 57-58. — MAREY. *La méthode graphique dans les sciences expérimentales, et principalement en Physiologie et en Médecine.* Paris, 1878.

I. — Représentation graphique des fonctions à deux variables (1).

95. La position d'un point sur un plan est déterminée par deux quantités que l'on nomme *coordonnées* du point. Il y a une infinité

(1) Les anciens géomètres connaissaient, à titre de cas particuliers, les équations de certaines courbes. Mais DESCARTES est le véritable créateur de la Géométrie analytique. Il a montré, d'une manière générale, comment une courbe peut être caractérisée par son équation, c'est-à-dire par la relation qui existe entre les coordonnées de chacun de ses points, et comment toute équation donnée peut être représentée par une courbe. On doit aussi à DESCARTES des solutions graphiques pour la détermination des racines des équations du troisième et du quatrième degré. La sublime invention cartésienne marque l'origine des méthodes qui permettent de représenter graphiquement les variations d'une quantité en fonction d'une autre quantité variable.

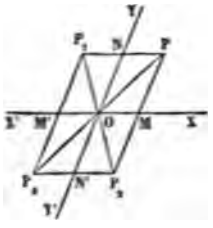
FERMAT s'est occupé, en même temps que DESCARTES, du moyen de représenter les lieux géométriques par des équations algébriques (*Ad locos planos et solidos Isagoge,* Introduction, p. 2. *Voir* BORDAS-DEMOULIN, *Le cartésianisme.* Paris, 1874, p. 382; HOEFER, *Histoire des Mathématiques,* Paris, 1874, p. 395).

Limité d'abord à l'expression graphique des fonctions mathématiquement définies, l'usage des courbes a été ensuite étendu à la traduction des données numériques résultant de l'observation. Il est difficile de dire à quelle époque et par qui cette nouvelle application a été faite pour la première fois. On en trouve déjà de fréquents exemples dans les écrits publiés vers le milieu du siècle dernier.

de *systèmes de coordonnées;* mais on fait le plus souvent usage du système *rectiligne* ou du système *polaire*.

Dans le système rectiligne, la position d'un point P (*fig.* 72) est déterminée par l'intersection de deux droites, PM, PN, parallèles à deux axes fixes concourants, XX', YY'. Les positions de PM et de PN sont elles-mêmes respectivement définies par les distances OM, ON, mesurées sur les axes à partir du point d'origine O. Les segments OM (*abscisses*) sont, par convention, considérés comme positifs ou comme négatifs selon qu'ils s'étendent, à partir de l'origine, dans la direction OX ou dans la direction OX'. Pareillement, les segments ON (*ordonnées*) sont positifs dans le sens OY et négatifs dans le sens OY'. Cette convention permet de distin-

Fig. 72.



Dès 1769, Francesco Luino avait indiqué le moyen d'établir graphiquement « l'état scientifique de chaque siècle et en particulier du XVIIIe » (*Giornale di Brera*, 1769, t. III, p. 161. *Lettere scritte da più parti d'Europa a diversi amici suoi nel* 1783, etc., Pavia, 1785, p. 50-65). — *Biblioteca matematica italiana* di Riccardi, t. II, Modena, 1873, col. 57).

En 1789, Playfair donnait ses *Tableaux d'Arithmétique linéaire du commerce, des finances et de la dette nationale d'Angleterre* (traduction française, Paris, mars 1789, Biblioth. nation., n° 153), dans lesquels on trouve notamment deux diagrammes mettant en relief l'accroissement de la dette publique en Angleterre, depuis 1688 jusqu'à 1784, et la balance de l'importation et de l'exportation dans le même pays.

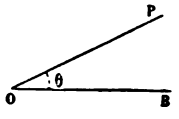
En 1791, Cassini publiait un *Tableau* graphique *de la direction de l'aiguille aimantée les* 4, 12, 20 *et* 28 *de chaque mois, et de sa marche observée à l'Observatoire royal de Paris depuis le* 4 *mai* 1783 *jusqu'au* 26 *décembre* 1788 (*De la déclinaison et des variations de l'aiguille aimantée observées à l'Observatoire royal de Paris depuis l'an* 1667 *jusqu'à* 1791, etc., par M. Cassini, Paris, L.-P. Couret, 1791).

Au commencement de ce siècle, Frissard construisait en France des Tableaux figuratifs du cours des assignats et du cours de la rente pour les périodes comprises entre 1789 et 1807. Nous citerons encore parmi les initiateurs de la méthode : Layton Cooke (1800); Girard (1816); Pfeiffer (*Tableaux graphiques peignant divers résultats d'observation*, 1820); Escher de la Linthe (1821); Tarbé (1833, courbe du choléra de 1832); Minard (*Tableaux graphiques relatifs à la consommation des pavages de Paris*, dans le *Projet de canal et de chemin de fer* pour le transport des pavés de Paris, 1826. — *Des Tableaux graphiques et des Cartes figuratives*, Paris, 1861); Klose (*Figur zur Correction für die Temperaturen der freyen Luft, zum Gebrauch des militärisch-topographischen Büreau's entworfen*, Carlsruhe, 1830); Priestley (*Chart of Biography*, etc.); Poggendorff (*Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, etc.). Voir Quetelet, *Histoire des Sciences mathématiques chez les Belges*, etc.

guer les points, tels que P, P_1, P_2, P_3, dont les coordonnées ont mêmes valeurs absolues, et d'attribuer chaque couple de coordonnées à un point du plan et à un seul. On obtient tous les points du plan en faisant varier les coordonnées depuis zéro jusqu'à l'infini dans les directions positives et négatives des deux axes.

Les coordonnées d'un point P sont les projections de la droite OP sur chacun des axes à partir du point à l'infini de l'autre axe. Lorsque les axes sont rectangulaires, les deux projections sont orthogonales et les coordonnées d'un point sont les distances de ce point aux deux axes.

Fig. 73.



Dans le système des coordonnées polaires, la position d'un point P (*fig.* 73) est déterminée par la longueur du segment OP (*rayon vecteur*) compris entre ce point et un pôle fixe O, et par l'angle θ que fait le segment OP avec un axe fixe OB. Le système des coordonnées polaires permet aussi d'obtenir tous les points du plan.

96. Au lieu de connaître une abscisse et une ordonnée, c'est-à-dire les deux conditions qui déterminent un seul point, on peut ne connaître qu'une certaine relation constante existant entre deux séries de grandeurs linéaires variables, susceptibles d'être prises successivement comme coordonnées relativement à deux axes. Cette relation constitue une première condition qui pourra être satisfaite par une infinité de points, mais non par des points quelconques pris au hasard dans le plan; à chaque valeur de l'une des variables correspondent en effet des valeurs en nombre fini de l'autre variable. La suite continue des points dont les coordonnées satisfont à la relation ou *équation* donnée forme une ligne plane AB, qui est la représentation géométrique ou le *lieu* de cette équation.

Réciproquement, si un point P est assujetti à parcourir d'un mouvement continu une ligne AB située dans le plan des axes OX, OY, les coordonnées de ce point varient quand il se déplace, et toute valeur arbitrairement attribuée à l'abscisse $OM = x$, ou à l'ordonnée $MP = y$, détermine une valeur correspondante de l'ordonnée ou de l'abscisse. Ainsi les deux coordonnées sont *fonctions* l'une de l'autre, et, si la ligne AB est géométriquement définie, on pourra déduire de sa définition même la relation qui existe entre

les deux coordonnées de l'un quelconque de ses points. Cette relation constitue l'équation en x et en y de la ligne AB.

On peut donc se proposer de tracer une courbe qui soit l'image d'une relation donnée entre deux variables ou de trouver une équation qui soit l'expression algébrique d'une courbe définie par une propriété géométrique. Le même raisonnement s'applique à tous les systèmes de coordonnées, et notamment au système polaire, dans lequel l'abscisse x et l'ordonnée y sont remplacées par le rayon vecteur ρ et par l'angle θ.

On voit, par ce qui précède, qu'une courbe et son équation sont deux expressions différentes d'une seule et même loi. On comprend dès lors que les problèmes d'application puissent être résolus soit par des constructions graphiques, soit par des calculs. Il est généralement facile de reconnaître, d'après la nature de la question, quel est celui des deux modes de solution qui doit être préféré.

97. Nous avons supposé jusqu'ici que la relation entre les variables x et y est soumise à une loi mathématique déterminée. La même loi préside alors à la génération de la courbe corrélative, et cette courbe est dite *géométrique*. Mais on peut aussi tracer, en la rapportant à un système d'axes coordonnés, la courbe représentative des relations qu'une suite d'observations a permis d'établir entre deux catégories de valeurs dont la dépendance mutuelle n'est exprimée par aucune loi préalablement connue. Les courbes de cette provenance sont souvent la traduction de Tables numériques à *simple entrée*, composées de deux colonnes dont les nombres se correspondent un à un. Ces courbes, appelées *graphiques* par quelques auteurs, n'existent en général que dans les limites où elles sont effectivement tracées et ne peuvent être prolongées au delà que si des observations plus étendues fournissent de nouveaux résultats à enregistrer.

98. Les courbes planes, géométriques ou graphiques, ont l'avantage de parler aux yeux et de faire saisir les lois de variation des fonctions mathématiques ou des relations empiriques beaucoup mieux qu'on ne le pourrait par la discussion des équations ou par l'examen laborieux des documents statistiques et des Tables numériques. Le tracé de plusieurs courbes, rapportées aux mêmes

axes, permet de comparer facilement les allures de plusieurs fonctions d'une même variable (¹), de trouver immédiatement, par exemple, les valeurs de ces fonctions qui correspondent à une même valeur de la variable commune ou les valeurs de la variable elle-même qui correspondent, soit aux plus grandes valeurs, soit aux plus petites valeurs, soit aux valeurs égales de la fonction.

Un autre avantage à retirer de la représentation graphique des fonctions consiste dans la possibilité de parvenir, soit par le procédé peu approximatif, mais relativement simple, de la pesée, soit par la sommation des trapèzes, soit au moyen d'instruments planimétriques, à la quadrature des courbes, sur laquelle repose la détermination d'un si grand nombre de résultats utiles.

Quand une courbe est géométrique et qu'on en connaît la nature, il suffit, pour la tracer tout entière, de calculer un petit nombre de ses ordonnées. On obtient ensuite graphiquement, avec une grande rapidité, les valeurs des ordonnées comprises entre les premières. L'interpolation graphique peut d'ailleurs être pratiquée, même quand on ne connaît pas la nature de la courbe à tracer, par le raccordement d'un certain nombre de ses points (²). Le problème

---

(¹) BELGRAND [*Étude des lois qui régissent les crues des cours d'eau* (*Annales de la Société météorologique*, t. I, p. 40; *Annales des Ponts et Chaussées*, septembre et octobre 1846, janvier et février 1852); — *Notice sur le régime de la pluie dans le bassin de la Seine* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 4ᵉ série. 1865, 2ᵉ semestre)] a dégagé ou vérifié ainsi plusieurs lois relatives au régime comparatif des pluies et des cours d'eau en diverses saisons. Voir MARIÉ-DAVY, *Météorologie générale; les mouvements de l'atmosphère et les variations du temps*, Paris, 1877, p. 324 et suiv. ELIAS LOOMIS (*Journal de Physique*, 1874, p. 101) et BALFOUR STEWART (*La Nature*, 1877, p. 107, 140, 163. — MAREY, *La méthode graphique*, etc., Paris, 1878, p. 37) ont mis en relief et commenté, par le rapprochement de trois courbes, la coïncidence des variations périodiques de trois phénomènes qu'on aurait pu croire indépendants les uns des autres, savoir : les changements diurnes de la déclinaison magnétique, la fréquence des aurores boréales et l'intensité des taches du Soleil. Voir aussi la relation établie par G. DAWSON entre les deux courbes qui représentent les variations annuelles des taches solaires et du niveau du lac Erié (la *Nature*, 1874). Dans les graphiques de la marche des trains sur un chemin de fer, dressés d'après la méthode d'IBRY, l'heure et le lieu de croisement de deux trains, ou de dépassement d'un train par un autre, sont donnés immédiatement par l'intersection des lignes qui représentent le mouvement des deux trains considérés.

(²) COUSINERY (*Le calcul par le trait*, IIIᵉ Partie) a fait de cette question une étude très étendue.

consiste alors à rapporter à une certaine fonction (¹), et par suite à la courbe que cette fonction définit, la relation qui existe entre des variables dont un certain nombre de valeurs sont données par l'observation.

99. Les représentations graphiques de résultats d'expériences conduisent aussi quelquefois à remplacer certaines formules empiriques, usitées dans la pratique des ingénieurs, par d'autres formules également empiriques, mais dont l'expression figurée côtoie de plus près le diagramme des faits observés (²). Ces représenta-

---

(¹) La fonction est ordinairement l'équation d'une courbe du genre parabolique, c'est-à-dire de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Il suffit, pour déterminer les constantes de cette équation, de pouvoir emprunter à l'observation une suite de valeurs particulières des variables, dont le nombre soit au moins égal à l'indice du degré de l'équation augmenté d'une unité. LAPLACE (*Traité de Mécanique céleste*, t. I, liv. II, art. 29) a donné une méthode pour trouver ces constantes par la comparaison de deux séries. MICHAL (Notes à l'Académie des Sciences des 11 octobre 1847 et 1er août 1853, et Mémoire inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 4e série, t. X, 1865, sous ce titre : *Méthode d'interpolation au moyen des courbes du genre parabolique*) a substitué aux démonstrations de LAPLACE d'autres démonstrations basées sur les procédés ordinaires de l'élimination. Il a donné des règles pratiques pour atténuer les causes d'erreur en déterminant d'une manière approchée le degré de la parabole d'interpolation qui doit être substituée de préférence à toute autre parabole d'un degré plus élevé ou d'un degré moindre. MICHAL a interpolé par des équations paraboliques les résultats de diverses expériences faites par REGNAULT pour déterminer les principales lois physiques et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur. Il a déterminé par la même méthode les constantes de l'équation relative à l'écoulement de l'eau dans les conduites. Voir dans un Mémoire de CAUCHY, lithographié à Prague en 1837 et réimprimé dans le Journal de LIOUVILLE, une méthode d'interpolation que M. YVON VILLARCEAU a développée dans les *Additions à la Connaissance des Temps pour* 1852.

(²) Voir *Tables hydrauliques et méthodes graphiques déduites de formules nouvelles pour les problèmes sur les eaux courantes*, etc., par M. DE SAINT-VENANT (Paris, 1852). Le Tableau graphique de la *Pl. I*. contient, tant pour les canaux découverts que pour les tuyaux de conduite, les courbes comparatives fournies par les formules de PRONY, par celles d'EYTELWEIN, par des résultats d'expériences et par une nouvelle formule qui s'écarte moins que les autres du diagramme expérimental. Les Tableaux de la *Pl. II* du même Mémoire servent à déterminer graphiquement : 1° les largeurs et profondeurs qui peuvent être données à un canal trapèze pour transporter une quantité d'eau donnée, sur une pente donnée; 2° les remous produits dans un cours d'eau, en amont d'un barrage qui relève ses eaux d'une hauteur connue en un point déterminé.

tions peuvent, de la sorte, ouvrir la voie à la détermination de certaines lois ou corrélations encore inconnues. Tel est le but final qu'on se propose d'atteindre, et dont on s'approche plus ou moins, quand on traduit graphiquement les relevés statistiques établis d'après l'observation des faits économiques (1) ou des phénomènes naturels.

Nous signalerons, parmi les diagrammes statistiques importants qui ont figuré à l'Exposition de 1878, ceux qui se rapportent au trafic annuel du canal de Suez, à l'histoire financière de la ville de Paris, au développement agricole et industriel et au mouvement de la population en Algérie, à la variation des prix et des salaires en Italie, au commerce de la Russie, de la Hongrie, de l'Amérique, etc.

Il était naturel d'exprimer par des diagrammes de même sorte les variations de cours des valeurs publiques et des principales denrées. Cette application, indiquée par Frissard dès le commencement de ce siècle, tend aujourd'hui à se généraliser. On en trouve de nombreux exemples dans les publications périodiques faites par les Bourses de divers pays, par les journaux financiers et par certaines maisons de commerce. Ces représentations synthétiques permettent de saisir à première vue tous les mouvements du marché. Elles donnent des faits une idée beaucoup plus exacte et beaucoup plus complète qu'on ne pourrait se la procurer par un amas de chiffres disposés en Tableaux (2).

---

(1) Nous rappellerons à ce propos les beaux travaux de QUETELET sur la Physique sociale et sur l'Anthropométrie (*Anthropométrie, ou mesure des différentes facultés de l'homme*, 1871). Les premiers travaux de QUETELET sur ce sujet remontent à 1835. Voir aussi : BOCCARDO, *Dell' applicazione dei metodi quantitativi alle scienze economiche, statistiche e sociali*, Torino, 1875, p. XXXIV. — J. RUSSEL SOWRAY, *Chronological, historical and statistical diagram from the year* 1600 *to the present time*, 1860). — BOWDITCH, *The growth of children*, Boston, 1877, from the *Eighth annual Report of the State Board of health of Massachusetts*. — H. TH. KUHNE, *Graphisch-statistischer Atlas*. — *Atlas* de BERGHAUS. — ANZIANI, *Relazione al Ministro d'agricoltura, industria e commercio intorno ai lavori eseguiti nella ultima adunanza del Congresso di Statistica dell' Aja*. — ÉLYSÉE RECLUS. *Géographie universelle*, avec de nombreux diagrammes représentatifs des conditions économiques et naturelles des diverses contrées. — FAVARO, *Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità*, Padova. 1875; *Sulla rappresentazione grafica dei prezzi delle derrate*. Padova, 1875, etc.

(2) On traduit assez souvent les faits de Statistique en coordonnées polaires. La Compagnie des chemins de fer de l'Ouest a publié, dans ce système, des diagrammes

100. Les sciences physiques mettent fréquemment à profit les avantages de la représentation graphique ; mais c'est surtout dans l'expression des phénomènes météorologiques que l'usage des diagrammes tend à se généraliser. L'*Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an* 1878 en contient notamment un grand nombre, qui permettent de saisir et de comparer les variations accusées par les instruments indicateurs de la pression atmosphérique, de la température, de la quantité de pluie tombée, de l'évaporation, de l'intensité lumineuse, de la direction des vents et de leur force, des quantités d'humidité, d'ozone, de microbes ou de divers gaz contenues dans l'atmosphère, de l'inclinaison et de la déclinaison magnétiques, etc. Dans ces diagrammes, le temps, exprimé en heures, en jours ou en mois, est généralement pris comme variable indépendante et porté en abscisses. Les quantités correspondantes, accusées par l'observation des phénomènes, sont aussi exprimées en grandeurs linéaires et portées en ordonnées. On réunit souvent dans un même Tableau, en les faisant dépendre de la même variable, les résultats fournis par divers ordres de phénomènes dont le rapprochement peut conduire à d'utiles déductions.

---

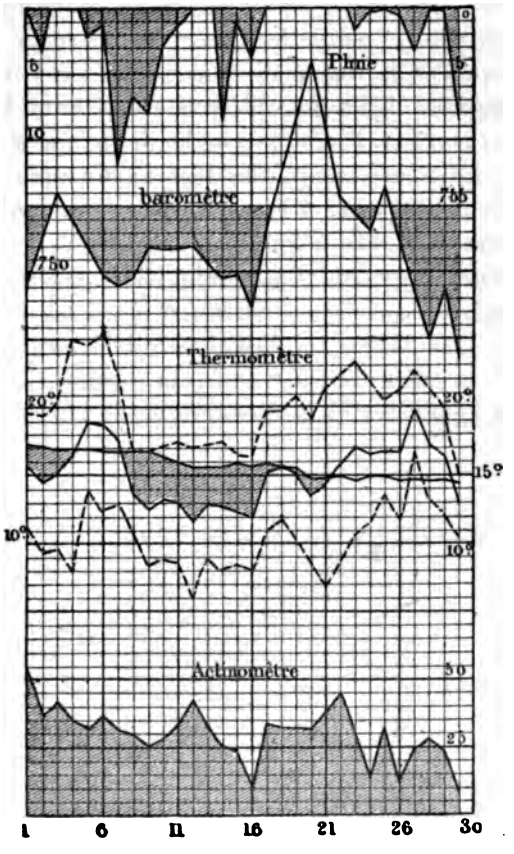
de ses recettes. Des rayons issus du pôle divisent le plan en cinquante-deux angles égaux correspondant aux cinquante-deux semaines de l'année. Les longueurs portées sur ces rayons à partir du pôle représentent les recettes hebdomadaires, à raison de $0^{m},001$ pour 2000^{fr}.

La Belgique a adopté le système polaire pour la statistique comparative de ses provinces. Chaque province occupe un secteur, et des couleurs diverses permettent de distinguer, dans chaque secteur, les diagrammes représentatifs des différents faits.

Il arrive quelquefois que, au lieu de porter sur des rayons équidistants des longueurs proportionnelles à la mesure des faits représentés, on opère la division proportionnelle sur une circonférence décrite du pôle comme centre. L'importance relative des faits est alors exprimée par l'ouverture relative des secteurs concentriques. Tel est le principe du diagramme dressé par la Chambre de commerce de Marseille pour mettre en évidence le tonnage comparatif des diverses puissances maritimes du monde. Voir, dans la *Relazione generale sui cenni monografici dei singoli servizi dipendenti dal Ministero dei lavori pubblici, compilati in occasione della Esposizione universale di Parigi dell' anno* 1878 (Roma, 1878), les diagrammes indiquant, pour chacune des provinces italiennes, les rapports de la viabilité à la superficie et à la population. Voir aussi G. Lebon, *La méthode graphique et les instruments enregistreurs*, etc., dans les *Rapports sur l'Exposition universelle* de 1878. Paris, 1879, p. 348

La *fig.* 74, par exemple, présente les diagrammes de la pluie, la pression atmosphérique, de la température et des degrés inométriques, d'après les observations quotidiennes faites à ontsouris pendant le mois de septembre 1876. L'axe des ab-

Fig. 74.



sses est gradué de 1 à 30, et chaque interligne de $0^m,002$ respond à un jour.

La hauteur de pluie tombée chaque jour est comptée à partir de orizontale et à raison d'un interligne par millimètre d'eau.

Dans la courbe du baromètre, qui donne la hauteur à midi, ique interligne correspond à 1^{mm} de mercure. L'horizontale

qui sert de limite à la partie hachurée correspond à la pression moyenne normale de 755^{mm}.

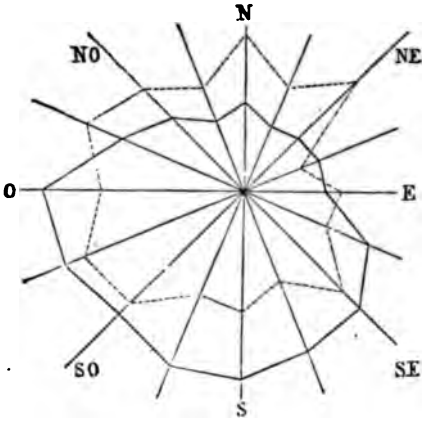
Les courbes de température sont au nombre de quatre. La première, en trait plein, correspond aux températures moyennes déduites, pour chaque jour du mois, de soixante années d'observations faites à l'Observatoire de Paris. La seconde, également en trait plein, est donnée par les températures moyennes diurnes de l'année 1876-77. La partie hachurée fait ressortir les périodes pendant lesquelles la température moyenne a été inférieure à la normale. Les deux lignes pointillées figurent, l'une la marche des températures maxima, l'autre la marche des températures minima.

La courbe inférieure marque les degrés actinométriques moyens de chaque jour, rapportés à la constante solaire 100. Chaque intervalle correspond alors à 5°.

L'emploi des diagrammes à coordonnées polaires est indiqué quand il s'agit d'exprimer les variations d'un phénomène qui peut s'accomplir dans toutes les directions ou d'un autre phénomène ayant avec le premier une relation d'effet à cause.

Les *roses* figuratives de la direction ou de l'intensité des vents

Fig. 75.



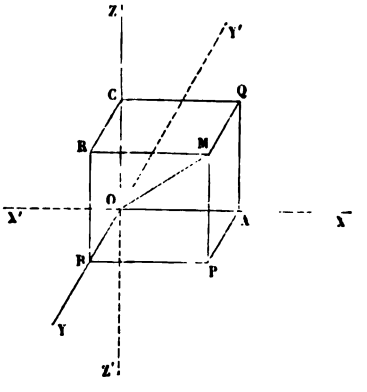
sont des applications bien connues de ce mode de représentation. La *fig.* 75 exprime, dans le même système, d'après les observations de Montsouris en 1877, la relation qui existe entre la direction des vents et les quantités d'ozone ou d'ammoniaque contenues

dans l'air. La courbe pleine est déterminée par des rayons vecteurs proportionnels aux quantités d'ozone. La courbe pointillée se rapporte à l'ammoniaque. On vérifie immédiatement que les quantités d'ozone, très petites quand le vent souffle dans les directions comprises entre le nord-ouest et le sud-est en passant par le nord, deviennent abondantes sous l'influence des vents de l'ouest, du sud-ouest et du sud (¹).

II. — Représentation graphique des fonctions à trois variables.

101. La position d'un point M dans l'espace est déterminée par trois coordonnées. Ces coordonnées sont, dans le système rectiligne rectangulaire, les distances positives ou négatives OA, OB, OC (*fig.* 76) d'un point fixe O, pris pour origine, à trois plans rectangulaires passant par le point considéré. Un autre point quelconque de l'espace étant déterminé par la commune intersection de trois autres plans respectivement parallèles aux précédents, ses coordonnées seront mesurées, à partir du point O, sur les mêmes axes que les premières.

Fig. 76.



On obtient les extrémités A, B, C des coordonnées d'un point M en projetant ce point sur chacun des trois axes fixes, au moyen d'un plan parallèle à la direction des deux autres axes.

102. On peut ne pas connaître les trois coordonnées qui déter-

(¹) Nous ne pouvons pas entrer ici dans le détail des innombrables applications qui ont été faites de la méthode graphique aux diverses sciences d'observation et principalement aux sciences médicales. On pourra consulter à ce sujet les Ouvrages suivants : Jaccoud, *Leçons de Chimie médicale*, etc. Paris, 1867. — Uhle e Wagner, *Trattato di Patologia generale*. Venezia, 1865. — Dohrn, *Die geburtshülflichen Operationen in Kurhessen während der Jahre* 1852-1856. Cassel, 1862. — Lorain, *La méthode graphique appliquée à l'étude clinique des maladies* (*Revue des Cours scientifiques*,

minent un point dans l'espace, mais avoir une certaine relation

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

entre trois séries de grandeurs linéaires variables x, y, z, susceptibles d'être prises comme coordonnées relativement à trois axes que nous supposons rectangulaires. Par un point C, situé sur l'axe OZ, à une distance quelconque c de l'origine, menons un plan parallèle à XOY. Les points de ce plan qui satisfont à la relation générale (1) sont liés entre eux par la relation plus particulière $f(x, y, c) = 0$. Or, on sait (96) que cette relation entre les deux variables x et y représente une courbe située dans le plan considéré. Si l'on attribue à Z une nouvelle valeur très peu différente de c, on a dans un second plan, parallèle au précédent, une seconde courbe qui diffère très peu de la première. En général, si l'on fait varier Z d'une manière continue, on obtient une suite continue de courbes dont l'ensemble forme une *surface*. Cette surface est la représentation géométrique ou le lieu de la relation donnée entre les trois variables.

103. Réciproquement, si un point M est assujetti à se mouvoir sur une surface S, les coordonnées de ce point varient quand il se déplace, et à chacune de ses positions correspond une valeur

---

Paris, 1870). — LORAIN, *La Médecine scientifique* (*Revue des Cours scientifiques*, Paris, 1870). — RUDORFF, *Grundriss der Chemie für den Unterricht an höheren Lehranstalten*, zweite Auflage. Berlin, 1870. — MANDELBLUH, *Tabellen zur Berechnung der Bodenerschöpfung und des Bodenkraft-Ersatzes. Graphische in Farben ausgeführte Darstellung der Mineralbestandtheile und des Stickstoff's landwirthschaftlicher Culturpflanzen und verschiedener Dungemittel*. Leipzig, 1870. — MAREY, *Du mouvement dans les fonctions de la vie*. Paris, 1867. — MAREY, *La machine animale, locomotion terrestre et aérienne*. Paris, 1873. — MAREY, *La méthode graphique dans les sciences expérimentales, et en particulier en Physiologie et en Médecine*. Paris, 1878. — LENOBLE DU TEIL, *Locomotion quadrupède étudiée sur le cheval*, dans le *Journal des Haras*, 1877. — G. LEBON, *Recherches anatomiques et mathématiques sur les lois de variation du volume du cerveau et sur leurs relations avec l'intelligence*. Paris. — LE BON, *La méthode graphique et les instruments enregistreurs*, etc. Paris, 1879.

Pour les applications de la méthode graphique à l'Astronomie, à la Navigation et à la Météorologie, voir BAILLE et HATT, *Notes sur la détermination des éclipses*, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Paris, juin 1878. — YVON VILLARCEAU et AVED DE MAGNAC, *Nouvelle navigation astronomique*. Paris, 1877. — MARIÉ-DAVY, *Météorologie générale*, etc. Paris, 1877.

déterminée de l'ordonnée PM ou z. Mais la projection P de M sur le plan XOY se déplace d'une manière arbitraire dans ce plan. L'ordonnée PM $= z$ d'un point quelconque M de S est, par conséquent, une fonction des coordonnées x et y de P, considérées comme variables indépendantes. Si la surface S est géométriquement définie, on pourra déduire de sa définition même la relation qui existe entre les coordonnées de l'un quelconque de ses points. Cette relation constitue l'équation en x, y et z de S.

On peut donc se proposer de construire une surface qui soit l'expression géométrique d'une relation donnée entre trois variables ou de trouver une équation entre trois variables qui soit l'expression algébrique d'une surface géométriquement définie.

On peut d'ailleurs étendre ce qui vient d'être dit des fonctions mathématiques aux lois naturelles ou empiriques et aux relations que l'observation a permis d'établir entre trois catégories d'éléments variables.

104. Toute surface courbe, pour être réellement représentée avec des reliefs, exigerait les trois dimensions de l'espace qui correspondent aux trois variables dont elles figurent la relation. Mais on peut, au moyen d'une notation aussi simple qu'expressive, remplacer les constructions dans l'espace par des tracés entièrement contenus dans un plan, qui est ordinairement le plan horizontal des xy. Imaginons, en effet, que l'on coupe la surface par une suite d'autres plans horizontaux équidistants et que l'on projette orthogonalement les courbes d'intersection ou *lignes de niveau* sur le plan des xy. Les projections seront l'exacte reproduction des courbes elles-mêmes. Le plan de projection ne conservant que les grandeurs des coordonnées x et y, et la troisième coordonnée z d'un point quelconque n'étant représentée que par la projection de ce point, on détermine la position de chaque courbe par un chiffre ou cote qui indique la valeur de z commune à tous les points de son plan. On possède ainsi, sur le *plan coté*, tous les éléments nécessaires pour rétablir au besoin la surface courbe avec son relief.

Ce procédé est analogue à celui qu'on emploie en Géodésie pour figurer au moyen de courbes d'égal niveau les reliefs du sol sur les plans topographiques cotés.

105. Supposons qu'il s'agisse de représenter graphiquement la loi mathématique à trois variables exprimée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle x et y sont les variables indépendantes, c'est-à-dire les arguments de la table numérique à double entrée qui servirait à déterminer les valeurs de z.

Attribuons à z les valeurs successives $0, z_1, 2z_1, 3z_1, \ldots$ et rapportons à un même système d'axes les courbes planes représentées par les équations

$$f(x, y, 0) = 0, \quad f(x, y, z_1) = 0,$$
$$f(x, y, 2z_1) = 0, \quad f(x, y, 3z_1) = 0, \quad \ldots.$$

Ces courbes sont les projections orthogonales des sections horizontales équidistantes pratiquées dans la surface représentée par l'équation (1); on les affecte respectivement des cotes $0, z_1, 2z_1, 3z_1, \ldots$.

Si l'équation donnée est du premier degré en x et en y, les lignes de niveau et leurs projections sont des droites.

Si l'équation est de la forme

$$z = ax + by + c,$$

le plan qu'elle détermine est coupé suivant des lignes de niveau qui sont des droites parallèles.

Si, dans la même équation, on fait $a = b$, les droites parallèles ont pour coefficient angulaire l'unité et font des angles égaux avec les axes des x et des y.

Ces angles sont de 45 degrés lorsque les axes sont rectangulaires.

L'équation $z = \frac{x}{y}$, ou, plus généralement,

$$z - c = \frac{x - a}{y - b},$$

est représentée par un faisceau de rayons cotés dont le centre a pour coordonnées a et b.

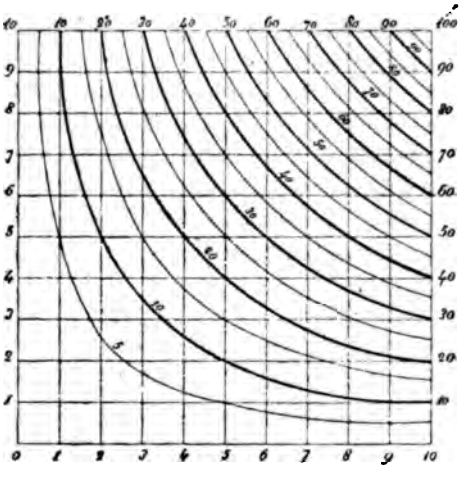
Lorsque l'équation à trois variables est du second degré, les courbes de niveau sont en général des coniques.

Soit, par exemple, à construire la suite des courbes de niveau constituant une table graphique propre à remplacer la table de Pythagore; x et y étant deux facteurs quelconques, leur produit est fourni par l'équation

$$z = xy,$$

dont l'expression géométrique est un paraboloïde hyperbolique. En donnant successivement à z différentes valeurs, on a les courbes horizontales de la surface. Ces courbes (G. 137, 259) sont des hyperboles équilatères homothétiques rapportées à leurs asymptotes. L'ensemble de leurs projections cotées constitue la table à double entrée de Pouchet, dont la *fig.* 77 présente une réduc-

Fig. 77.



tion. Pour déterminer le produit de deux nombres, on cherche le point du plan qui a pour coordonnées les valeurs linéaires représentatives de ces nombres. Ce point est sur une hyperbole dont la cote donne le produit cherché.

APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE V.

I. — Surfaces topographiques.

106. On nomme *surfaces topographiques* non seulement les surfaces de terrain considérées en Géodésie, mais encore, par extension, les surfaces dont la loi de génération n'est pas définie et dont les lignes de niveau, projetées sur le plan horizontal des xy, ne se rencontrent pas. Ces surfaces n'ont qu'un point sur chaque verticale.

On peut étendre aux surfaces topographiques, et spécialement aux surfaces représentatives des Tables numériques à double entrée, les diverses constructions auxquelles donne lieu la méthode dite des projections cotées. On trouve ces constructions dans les Traités de Géométrie descriptive ([1]).

Nous nous bornerons à rappeler celles qu'il importe le plus de connaître quand on se propose d'établir ou d'interpréter des Tables graphiques.

107. Une droite est déterminée par sa projection sur le plan horizontal de comparaison et par les cotes de deux de ses points.

Une droite est dite *graduée* lorsqu'on indique ceux de ses points qui correspondent à des ordonnées numériques exprimées par des nombres entiers.

On nomme *intervalle* la projection du segment de droite compris entre deux points dont les cotes diffèrent d'une unité.

On détermine, au moyen d'une simple proportion, la cote d'un point donné sur une droite ou la projection sur une droite d'un point dont la cote est donnée.

([1]) Voir notamment : LEROY, *Traité de Géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés*, 5e édit., Paris, 1859, p. 325-336. — DE LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive*, 2e édit., Ire Partie, Paris, 1873, liv. III, p. 110-119, et IIIe Partie, 1864, liv. X, p. 180-196. — MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de la Géométrie cinématique*, Paris, 1880, p. 15-23 et 446-460.

On appelle *pente* d'une droite la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec le plan de comparaison. Le produit de la pente par l'intervalle est égal à l'unité.

Les *lignes de plus grande pente* d'un plan sont perpendiculaires aux horizontales de ce plan. La projection cotée de l'une quelconque de ces lignes constitue l'*échelle de pente* du plan et suffit à le déterminer.

108. Tous les points d'une horizontale ayant même cote, on détermine la cote d'un point donné sur un plan en abaissant de la projection de ce point une perpendiculaire sur l'échelle de pente du plan.

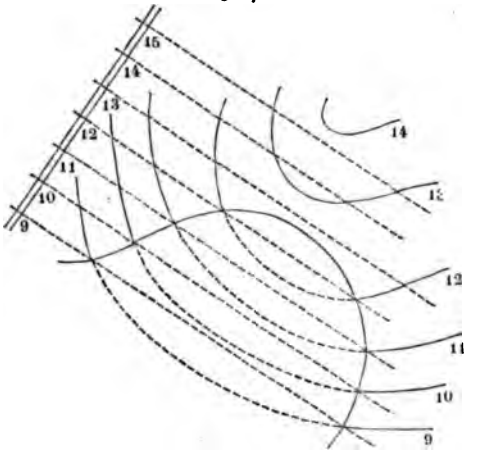
Trois points M, N, P étant donnés par leurs projections cotées, on construit l'échelle de pente de leur plan en joignant MN, déterminant le point Q de cette droite qui a même cote que P, et menant une droite perpendiculaire à l'horizontale PQ. Cette horizontale et une autre quelconque, celle du point M par exemple, coupent l'échelle A en deux points dont on connaît les cotes.

Deux droites sont dans un même plan lorsque le point d'intersection de leurs projections a même cote sur chacune d'elles.

La droite commune à deux plans donnés est déterminée par les points d'intersection des horizontales menées par deux couples de points ayant même cote sur les échelles de pentes des deux plans.

Pour déterminer le point d'intersection d'un plan donné par son échelle

Fig. 78.



et d'une droite donnée par sa projection cotée, on fait passer par la droite un plan auxiliaire, et l'on détermine comme il vient d'être dit la droite

APPENDICE DU

I.

106. On nomme *surf*
terrain considérées en G
dont la loi de génération
jetées sur le plan horizont
qu'un point sur chaque
On peut étendre aux s
faces représentatives des
constructions auxquelles
On trouve ces constructio
Nous nous bornerons à
quand on se propose d'ét

107. Une droite est dé
de comparaison et par les
Une droite est dite *gr*
correspondent à des ord
entiers.
On nomme *intervalle* la
deux points dont les cotes
On détermine, au moy
donné sur une droite o
cote est donnée.

(¹) Voir notamment : LEBO
des plans cotés, 5ᵉ édit., Pari
métrie descriptive, 2ᵉ édit., Iʳᵉ
liv. X, p. 180-196. — MASSM
nique, comprenant les élément
446-460.

commune à ce plan et au plan donné. Cette dernière et la droite donnée se coupent au point cherché.

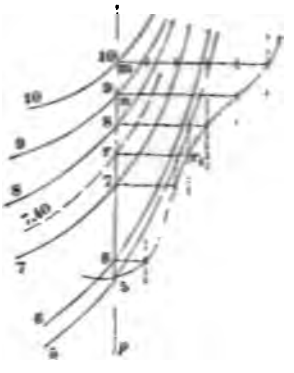
Quand une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection est parallèle à l'échelle de pente de ce plan. La droite et l'échelle de pente font avec le plan de comparaison des angles complémentaires. Le produit de leurs intervalles est donc égal à l'unité. On se fonde sur ces propriétés pour mener d'un point donné une perpendiculaire à un plan.

109. Soit à construire (*fig.* 78) l'intersection d'une surface topographique donnée par ses courbes de niveau et d'un plan donné par son échelle de pente.

Les horizontales du plan qui ont mêmes cotes que les courbes données sont respectivement dans les plans de ces courbes et les rencontrent en des points de la ligne d'intersection cherchée.

Lorsque le plan sécant *mp* est vertical (*fig.* 79), on le fait tourner autour de l'une de ses horizontales, celle qui est à la cote 5 par exemple, jusqu'à ce qu'il devienne lui-même horizontal. Le point de rencontre de ce plan et de la courbe 10 est à cinq unités au-dessus de la charnière; on obtient donc son rabattement en mesurant à l'échelle du dessin 5 unités à partir du point *m* sur la perpendiculaire élevée en ce point à *mp*.

Fig. 79.



De même, le point de rencontre du plan sécant et de la courbe 9 est rabattu à 4 unités au-dessus du point *n* sur la perpendiculaire en ce dernier point à la droite *mp*. La courbe qui joint la suite des points rabattus de cette manière est la projection du rabattement, sur le plan de la courbe 5, de l'intersection du plan vertical et de la surface topographique.

Cette surface n'étant donnée qu'approximativement par ses courbes de niveau, les problèmes auxquels elle donne lieu ne comportent que des solutions approximatives.

110. Il arrive souvent qu'aux deux coordonnées variables servant d'arguments correspond un point compris entre deux courbes de niveau consécutives. La cote de ce point est alors fournie par une interpolation à vue ou par une construction.

Soit à déterminer, par exemple, la cote d'un point r_1 projeté en [illegible] les courbes 7 et 8. On construit, comme précédemment, la [illegible]

e la section faite dans la surface par un plan vertical mp passant par r, t l'on ajoute à la cote 5 de l'horizontale du point r la longueur de l'ordonnée rr_1.

Il suffit en général de joindre par une droite les rabattements des points qui se projettent en 7 et 8. L'ordonnée rr_1 est alors mesurée entre cette droite et le plan horizontal du point r.

111. Soit à déterminer inversement, sur une droite mp, la position d'un point r_1 de la surface, dont on connaît la cote. Les cotes de r_1 et de mp étant respectivement $7^m,40$ et 5^m, on mène parallèlement à mp et à la distance de $2^m,40$ une droite qui rencontre en r_1 la projection du rabattement de la courbe suivant laquelle la surface est coupée par le plan vertical mp.

En projetant le point r_1 sur mp, on obtient le point r, qui est coté $7^m,40$. Dans ce cas encore, on néglige le plus souvent la courbure de la section verticale entre les points projetés en 7 et en 8.

On peut répéter la construction précédente pour un certain nombre de plans verticaux et déterminer le point coté $7^m,40$ sur la projection de chacun de ces plans. La réunion par un trait continu de tous les points qui répondent à cette condition donne la *courbe de niveau intercalaire* cotée $7^m,40$.

112. On construit l'intersection de deux surfaces topographiques données par leurs courbes de niveau en raccordant par un trait continu les points d'intersection des couples de courbes qui ont même cote.

Pour construire l'intersection d'une surface topographique et d'une droite, on détermine l'intersection de la surface et d'un plan passant par la droite. La ligne ainsi obtenue et la droite donnée se coupent au point cherché.

113. La pente d'une ligne en un point est la pente de sa tangente au même point. La ligne est d'égale pente quand toutes ses tangentes sont également inclinées à l'horizon.

Soit à tracer, sur une surface topographique donnée par des courbes de niveau dont l'équidistance est prise pour unité, une ligne passant par un point donné de l'une des courbes et dont la pente uniforme soit égale à m.

Du point donné A comme centre, avec un rayon égal à $\frac{1}{m}$, on décrit un arc de cercle qui coupe la courbe voisine en un point B. On transporte le centre en B, et, sans changer l'ouverture de compas, on décrit un nouvel

arc qui rencontre la courbe suivante en C. La solution est approximativement fournie par la ligne qui joint la suite des points A, B, C, ...

Le problème présente deux solutions, ou une seule, ou n'en comporte aucune, selon que le cercle de rayon constant dont le centre est sur une courbe coupe la courbe suivante, la touche ou ne la rencontre pas.

On résout par tâtonnement le problème qui consiste à tracer sur une surface topographique une ligne d'égale pente entre deux points donnés.

114. Toute ligne qui coupe à angle droit les courbes de niveau d'une surface est une *ligne de plus grande pente* de la surface. Il peut arriver qu'une infinité de ces trajectoires orthogonales passent par un point donné : tel est, par exemple, le cas du point où une surface de révolution est rencontrée par son axe. Mais, en général, une seule ligne de plus grande pente passe par un point déterminé d'une surface, car on ne peut mener qu'une normale à une courbe en un de ses points.

115. Le plan tangent en un point A d'une surface topographique est déterminé par deux tangentes à la surface en ce point : la tangente t à la courbe de niveau du point A, et la tangente t' à la section faite dans la surface par le plan vertical perpendiculaire à t en A. La droite t' est une ligne de plus grande pente du plan tangent.

La surface est à courbures opposées quand elle est coupée par le plan tangent en un de ses points. La surface présente un *col* lorsque le plan tangent qui la coupe est horizontal.

II. — Applications des surfaces topographiques à la représentation des phénomènes naturels (1).

116. M. Léon Lalanne est l'auteur d'une première application devenue classique.

---

(1) C'est encore à Descartes qu'il faut rapporter l'interprétation géométrique des fonctions à trois variables. Mais la première application des *courbes de niveau* parait remonter à une époque plus ancienne. Bassantin en faisait usage au XVIe siècle pour ses études sur le mouvement des astres (*Astronomique discours de Jacques Bassantin, Écossais*. Lion, chez Jan de Tovrnes, 1557). Les Hollandais du siècle suivant indiquaient, sur leurs Cartes de dessèchement, les pentes du terrain par des lignes d'égal niveau (le P. Jean François, *L'art du fontainier*, 2e édit., 1665, p. 25). Philippe Buache a généralisé par la suite l'idée féconde de représenter les reliefs du globe au moyen des projections cotées des lignes de niveau. Buache a exposé sa méthode dans l'*Essai de Géographie physique* (*Mémoire de l'Académie des Sciences* pour 1752). Une

A la suite d'observations nombreuses, dont les résultats étaient complétés par des interpolations, le météorologiste Kæmtz avait dressé une Table numérique à double entrée, dont la première colonne verticale portait les chiffres correspondants aux vingt-quatre heures d'une journée et dont les

---

Carte, jointe au Mémoire, sur laquelle sont tracées les lignes d'égale profondeur de la mer de 10 en 10 brasses, avait même été présentée à l'Académie dès 1737.

L'idée de Buache a été, en 1780, reprise, étendue et simplifiée, quant à la notation, par Ducarla, professeur français établi à Genève (*Sixième cahier de Ducarla* et Mémoire intitulé *Expression des nivellements ou méthode nouvelle pour marquer sur les Cartes terrestres et marines les hauteurs et les configurations du terrain*, Paris, 1782, p. 81). Mais cette méthode a été tout d'abord si peu répandue qu'en 1804 Dupain-Triel l'a représentée comme une invention nouvelle (*Méthode nouvelle de nivellement présentant des moyens exacts et pratiques d'exprimer ensemble sur les Plans et les Cartes les dimensions horizontales et verticales des objets*, avec une Carte comme spécimen, an XII).

L'application des plans cotés à la traduction graphique des Tables numériques à *double entrée* n'a été proposée qu'en 1795 par Pouchet. Encore convient-il de remarquer que Pouchet faisait usage des *lignes d'égal élément* sans voir dans ces lignes les projections sur un plan des sections faites dans une surface par d'autres plans parallèles au premier (voir *Première Partie, Géométrie de position*, Préface, p. xx).

D'Obenheim (*Balistique*, Strasbourg, 1814; *Mémoire contenant la théorie, la description et l'usage de la planchette du canonnier*, Strasbourg, 1818) a donné des échelles pour la résolution des problèmes de Balistique et fait implicitement usage des courbes d'égale cote, sans toutefois les considérer comme résultant de coupes faites dans une surface.

En 1825, Piobert a fait usage des *surfaces topographiques* pour traduire graphiquement des résultats d'expériences. Il a été conduit à cette application par la vérification des Tables de tir à ricochet que le colonel Liautey venait de calculer (*Mémorial de l'Artillerie*, t. I, 1826).

C'est dans le troisième Volume du même Recueil (1830) que Terquem, à propos d'une construction graphique des Tables de Lombard proposée par Bellencontre, a dogmatiquement établi la relation qui existe entre une Table numérique à double entrée et la représentation d'une surface par des courbes d'égale cote. Le même Volume contient un beau Mémoire de Terquem sur les planchettes ou Tables à double entrée de d'Obenheim.

Dans son *Explication d'un nouveau système de tarifs, ou nouvelle méthode pour trouver en mesures métriques, sans aucun calcul, les poids des métaux, le cube des bois*, etc. (Paris, 1840), Allix a donné des Tableaux graphiques à double entrée, représentant les courbes de niveau déterminées par les équations de la forme $x^2y = \text{const.}$ Il ne s'est point préoccupé de rattacher ces hyperboles du troisième ordre aux surfaces dont elles sont les projections.

En 1842 (*Collection de Tables pour abréger les calculs relatifs à la rédaction des projets de routes et de chemins de toute largeur*, formant l'Appendice n° 4 au t. I, 4e édit., du *Cours de construction* de feu M. J. Sganzin), M. Lalanne a montré que la surface d'un demi-profil de terrassement, en fonction de la cote sur l'axe et de la déclivité du terrain, est donnée par l'équation d'un hyperboloïde dont les sections horizontales paraboliques, projetées sur un plan également horizontal et cotées,

douze autres colonnes se rapportaient aux douze mois de l'année. Chacun des nombres inscrits dans cette Table correspondait ainsi à deux arguments et donnait pour la ville de Halle, lieu des observations, la moyenne des températures relevées à la même heure tous les jours d'un même mois.

---

forment un Tableau graphique propre à remplacer les Tables numériques dressées pour calculer les mêmes surfaces de profils. Le même savant, généralisant le principe de cette méthode, en a proposé l'application à diverses lois naturelles, notamment à l'expression des variations mensuelle et horaire de la température, et à la statistique figurée de la population, dans une région déterminée, au moyen des courbes d'égale population spécifique (*Mémoire sur la représentation graphique des Tableaux météorologiques et des lois naturelles en général*, présenté à l'Académie des Sciences le 29 mai 1843 et servant d'Appendice à la traduction française du *Cours complet de Météorologie* de L.-F. KAEMTZ. Paris, 1843 et 1858. — Rapport de MM. ELIE DE BEAUMONT, LAMÉ et CAUCHY, 11 septembre 1843, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVII, p. 492. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XX, 1845, p. 438).

FÉVRE a donné en 1844 (*Traité du mouvement de translation des locomotives, Pl. X*) un plan topographique qui fait connaître la vitesse d'une locomotive, étant donnés le poids du convoi et l'inclinaison de la rampe sur laquelle on le remorque.

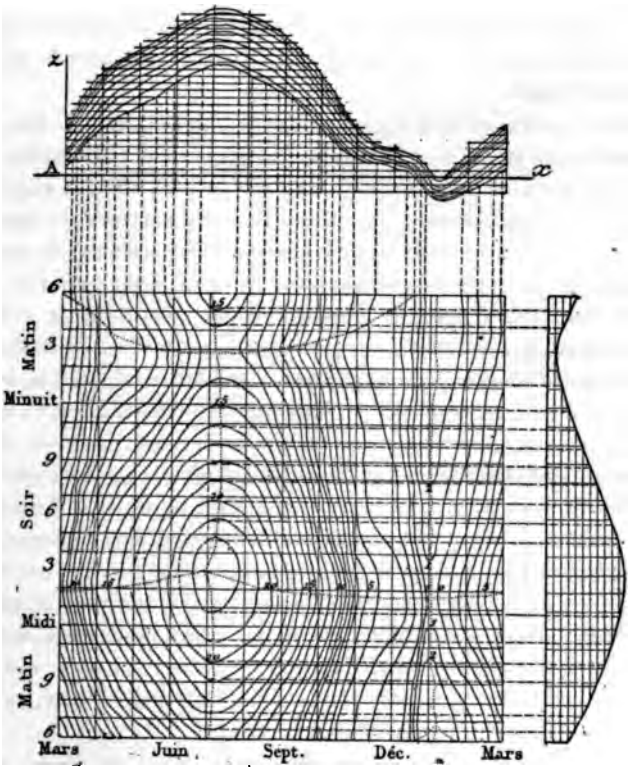
DIDION (XXVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) a appliqué la notation de BUACHE à la représentation graphique des résultats comparatifs d'expériences faites sur la justesse du tir à balles plates et à balles longues.

On peut encore citer, parmi les applications relativement anciennes se rattachant plus ou moins directement au mode de représentation qui nous occupe : les lignes d'égale déclinaison de l'aiguille aimantée, construites par HALLEY sur une Mappemonde, au commencement du XVIIe siècle; le tracé du méridien magnétique par EULER; la figuration des lignes isothermes, par DE HUMBOLDT (1813); les lignes d'égale déclinaison, d'égale inclinaison et d'égale intensité magnétique, par DUPERREY; les lignes d'égale intensité lumineuse, par MASON (1843); le dromographe planétaire de LÉVY et LEWANDOWSKI (1849).

Parmi les applications récentes des surfaces topographiques, sans déformation des lignes, nous indiquerons : les courbes figuratives des variations de la température, de la pression atmosphérique, de l'humidité, de la vitesse du vent, exposées au Congrès géographique de Paris, en 1875, par l'Observatoire de l'Infant D. LUIZ, de Lisbonne; les diagrammes des variations horaires de la pression atmosphérique, de la température, du degré hygrométrique, de la déclinaison, publiés par l'*Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an* 1878 (p. 373, 384, 407 et 428); les abaques rectilignes de PLASSIARD pour exprimer les relations qui existent entre le son rendu par une corde vibrante, le poids de l'unité de longueur de cette corde et la tension à laquelle on la soumet (*Congrès de Lille*, p. 192 et *Pl. II*); les abaques du commandant GUILLEMOT et des capitaines RICOUR et DELAMBRE pour mesurer les effets des fourneaux de mines (*Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 21, Paris, 1873); les *Tables graphiques* annexées aux Tables numériques de PEREIRE pour le calcul des intérêts composés, annuités, rentes viagères, etc. (Paris, 1873); les abaques de M. THOVOT pour la détermination du nombre minimum de freins qu'il convient d'appliquer à un train, étant donnés le nombre des wagons et la vitesse (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e sem. 1874, p. 430); la Carte des courbes d'*égale population spécifique* de Paris, dressée par

La *fig.* 80 est la traduction graphique des résultats fournis par la Table numérique de Kæmtz. On a adopté des grandeurs arbitraires pour représenter les mois, les heures et les degrés de température. Les mois et les

Fig. 80.



heures, pris comme variables indépendantes, sont respectivement portés sur les axes rectangulaires des x et des y; les degrés sont portés sur l'axe des z,

---

M. Vauthier en 1873, suivant le système soumis par M. Lalanne à l'Académie des Sciences en 1845 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 264); le diagramme des marées au port de Brest, donné par M. Fénoux, d'après les courbes inscrites par le marégraphe de Chazallon (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1869, 2e sem., p. 170); l'épure représentative du mouvement des marées au Havre pendant le mois de septembre 1877, dressée par M. Quinette de Richemont; enfin divers abaques dressés par le commandant Chéry, pour résoudre graphiquement les principales formules de la résistance des matériaux (*Pratique de la résistance des matériaux dans les constructions*, Paris, 1877).

perpendiculaire au plan des xy, qui est le plan de comparaison. Chacune des tranches horizontales de la Table numérique donne pour une même heure les températures moyennes des différents mois. Elle constitue donc une Table à simple entrée qu'on traduit par une courbe plane, rapportée aux axes Ax et Az.

Cette courbe est une section plane pratiquée perpendiculairement à l'axe des heures dans la surface topographique qui doit remplacer la Table numérique de Kæmtz.

La partie supérieure de la figure représente huit des vingt-quatre courbes qu'on détermine en opérant de la même manière pour chacune des heures. Ces courbes horaires ont pour projection sur le plan des xy vingt-quatre droites horaires équidistantes, parallèles à l'axe des x. Une droite horizontale dont le z exprime, à l'échelle adoptée, un nombre déterminé de degrés du thermomètre, rencontre les courbes horaires en des points dont les projections sur les droites horaires correspondantes appartiennent à la ligne d'*égale température* qui doit avoir pour cote la valeur de z considérée. Les intersections des courbes horaires par une suite d'horizontales, dont le z varie de degré en degré, déterminent des lignes d'égale température, ou lignes de niveau de la surface, dont les cotes varient de la même manière. On trace assez exactement chacune de ces lignes en reliant par un trait continu les points des droites horaires qui lui appartiennent. Le tracé ne devient incertain que dans le voisinage des points où les tangentes aux lignes de niveau sont parallèles à l'axe des mois. Ces points s'écartant peu de l'ordonnée du mois de juillet, on fait disparaître toute incertitude en déterminant, au moyen de la colonne numérique de juillet, la section plane, perpendiculaire à l'axe des mois, qui se projette suivant la même ordonnée. On opère ensuite sur le profil de cette section, qui est une courbe de variation diurne, comme on a précédemment opéré sur les courbes horaires.

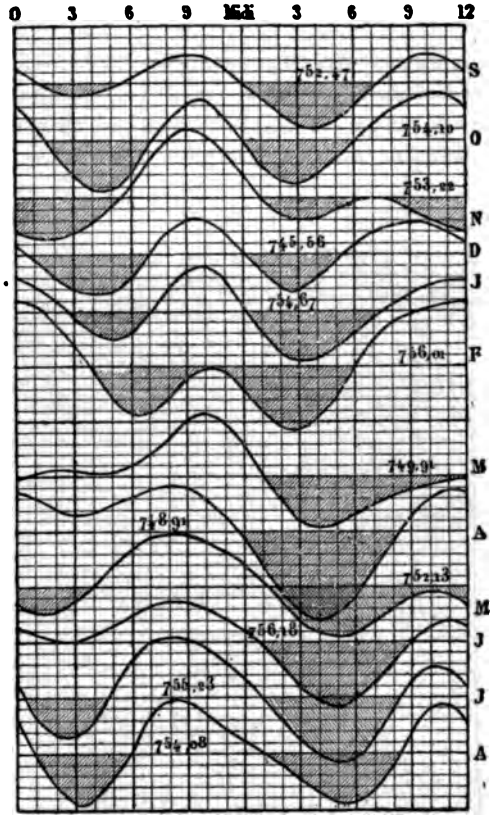
Les ondulations de la surface figurées par les lignes de niveau donnent l'image fidèle de la variation des températures moyennes aux différentes heures du jour et aux différentes périodes mensuelles de l'année. Les variations observées suivant une trajectoire orthogonale donnée sont d'autant plus grandes qu'on mesure, sur la même trajectoire, des intervalles plus petits entre les lignes de niveau consécutives.

Le point culminant de la surface, autour duquel se ferment des courbes à cotes croissantes, est aux environs du mois de juillet et de 3^h après-midi; c'est un maximum absolu. Entre 1^h et 2^h de l'après-midi, en janvier, est un *col* qui indique un minimum pour les mois et un maximum pour les heures. Un nouveau col est entre juillet et août, vers 3^h du matin.

Si l'on unit par un trait continu la suite des points de contact des courbes

de niveau avec leurs tangentes perpendiculaires à l'axe des mois, on obtient les lignes des points les plus hauts et des points les plus bas des sections perpendiculaires au même axe. Ces lignes, figurées en pointillé, indiquent, suivant la saison, les heures du maximum ou du minimum diurne. Les points de contact des tangentes perpendiculaires à l'axe des heures déter-

Fig. 81.



minent pareillement les lignes qui marquent les époques du maximum et du minimum pour chaque heure.

117. L'*Annuaire de Montsouris* pour 1878 contient une application plus récente des mêmes principes à la représentation des variations horaires du baromètre.

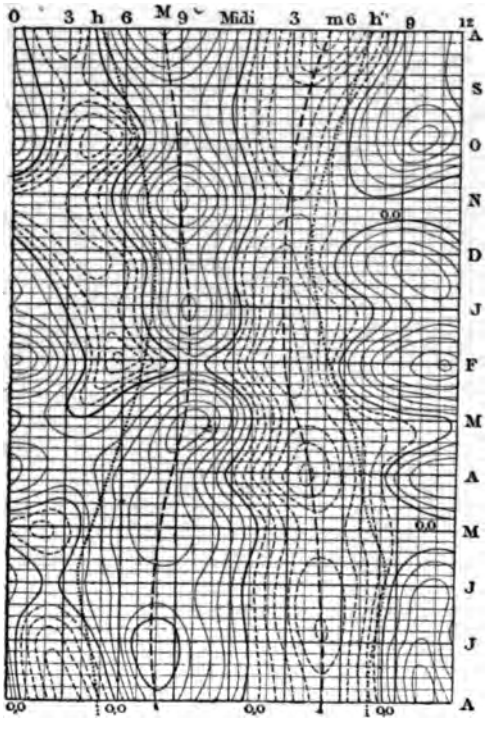
On calcule, d'après les observations, la pression moyenne totale pour

chacun des mois de l'année et la moyenne des pressions à chaque h jour pour tous les jours de chaque mois, Les différences positives c tives entre les vingt-quatre moyennes horaires d'un mois et la moyenne du même mois constituent des écarts moyens qu'on porte données d'une courbe dont les heures sont les abscisses.

La *fig.* 81 représente les douze courbes distinctes qui correspond douze mois. Les nombres inscrits sur les douze horizontales pris axes des abscisses indiquent les pressions moyennes des mois cor dants.

Les douze courbes de la *fig.* 81 peuvent être considérées comme fils en travers équidistants, relevés sur une surface topographique. rant comme dans le cas qui précède, on reconstitue, au moyen de c fils, la surface elle-même dans les conditions représentées par la

Fig. 82.



Chacune des courbes de niveau de ce diagramme raccorde la suite de déterminés par les heures des divers mois auxquelles corresp

même écart moyen. Les courbes sont en traits pleins ou pointillés, selon que les écarts horaires moyens sont positifs ou négatifs.

La courbe MN est une ligne de faîte déterminée par les écarts maxima qui se produisent aux environs de 9^h du matin. La courbe *mn* est un thalweg déterminé par la suite des écarts minima qui se produisent entre 3^h et 5^h du soir. Deux autres lignes pointillées *hh* et *h'h'* passent par les heures du lever et du coucher du Soleil.

Les quatre lignes ainsi tracées forment une figure à peu près symétrique et montrent bien que l'oscillation barométrique diurne est liée à la marche du Soleil.

III. — Diagrammes à colonnes et cartogrammes.

118. Il convient de signaler encore, à raison de l'emploi fréquent que certains auteurs en ont fait, deux modes particuliers de figuration plane, connus sous les noms de *diagrammes à colonnes* et de *diagrammes cartes*.

Les premiers se composent en général de rectangles juxtaposés, ayant pour bases des segments consécutifs, égaux ou inégaux, de l'axe des abscisses, et pour hauteurs des quantités proportionnelles à la mesure des faits qu'on veut comparer. Pour exprimer, par exemple, l'importance du commerce maritime de divers pays, on attribue à chacun d'eux un rectangle de base constante et de hauteur proportionnelle à son tonnage. On peut même diviser chaque colonne en rectangles superposés, donnant chacun des résultats partiels aussi intéressants à comparer que les ensembles. Dans le cas considéré, les rectangles des tonnages totalisés pourront être décomposés en deux autres, respectivement proportionnels au tonnage des navires à vapeur et au tonnage des navires à voiles.

Les rectangles totaux juxtaposés ont quelquefois même base et même hauteur. Chacun d'eux exprime alors 100 parties, par exemple, d'une même chose dont les éléments constitutifs, contenus en proportions différentes dans les divers cas à comparer, sont représentés par les rectangles partiels que ces proportions déterminent. On trouve dans l'Ouvrage si remarquable de M. Élisée Reclus [1] beaucoup de diagrammes de cette sorte, dont un, notamment [2], exprime le tant pour cent de terres labourées, de prairies, de forêts, de terres incultes et d'eaux en Suède, en Norvège et en Danemark. Si l'on avait remplacé les bases égales par des bases proportionnelles aux superficies territoriales de ces trois pays, le diagramme aurait fourni non

(1) *Nouvelle Géographie universelle. La Terre et les hommes.* Paris, 1876-1881.
(2) T. V, p. 204.

seulement les *pourcentages*, mais encore les valeurs absolues des éléments partiels de chaque pays.

On construit de la même manière les diagrammes figuratifs des prix de revient par kilomètre de diverses lignes ferrées (1). Le rectangle total relatif à chaque ligne est alors formé de rectangles superposés, dont les hauteurs sont respectivement proportionnelles aux dépenses kilométriques pour acquisition des terrains, terrassements, ouvrages d'art, voies, matériel roulant, frais généraux, etc. Il en résulte que les colonnes totales ont en général des hauteurs différentes. Si, d'autre part, on donne à ces colonnes des largeurs proportionnelles aux nombres de kilomètres des lignes correspondantes, le Tableau fournira, en même temps que les valeurs comparatives des éléments de dépense réduits au kilomètre, les valeurs absolues de ces éléments pour l'ensemble de chaque ligne.

Dans les Tableaux à colonnes dressés par Minard pour l'étude comparative du trafic de divers tronçons d'une même ligne ferrée, chaque tronçon est doté d'une base proportionnelle à sa longueur. Le rectangle élevé sur cette base pour représenter le trafic total d'un tronçon est divisé en deux rectangles partiels par une horizontale. Le rectangle supérieur représente le trafic local entre les deux stations extrêmes du tronçon; le rectangle inférieur représente le trafic de transit commun à tous les tronçons de la ligne entière. Ce dernier rectangle a même hauteur sur tout le développement du Tableau, et les rectangles supérieurs varient seuls à raison de l'importance commerciale des stations qui les limitent. Le rectangle total de chaque tronçon est quelquefois décomposé en plusieurs rectangles dont les hauteurs sont proportionnelles aux subdivisions du trafic, d'après les diverses espèces de marchandises. Ce mode de représentation a été appliqué aux canaux par Comoy (2) (1845).

119. Les *diagrammes-cartes* ou *cartogrammes* sont des cartes ordinaires sur lesquelles on exprime par des teintes ou par d'autres marques conventionnelles, par des bandes proportionnelles, par des suites de petits diagrammes locaux ou par des courbes d'égal élément, le lieu géographique et l'importance relative de certains faits.

---

(1) Voir Ruelle, *Note relative aux chemins de fer à bon marché et d'intérêt local*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1868, 2e semestre, p. 66, et *Pl.* CLXIX.

(2) Parmi les diagrammes à colonnes qui ont figuré à l'Exposition de 1878, nous mentionnerons, dans la Section hongroise, les Tableaux analytiques du trafic des chemins de fer, de la production des forêts, des mines, des usines, etc., et beaucoup d'autres représentations de faits techniques ou économiques.

Le Dr Bertillon a fait un usage fréquent des Tableaux en colonnes, ainsi qu'on a pu en juger par son exposition spéciale de démographie.

La disposition la plus simple et la plus usitée jusqu'ici est celle des *cartogrammes à teintes ou à hachures dégradées*. Pour traduire en cette forme des résultats statistiques relatifs à la distribution des populations, au degré d'instruction, à la criminalité, à la mortalité, à la longévité, au paupérisme, à la production en blé, en vins, etc., c'est-à-dire à l'intensité variable d'un phénomène physique ou social dans les diverses régions d'un même pays, on recouvre, sur la Carte, la superficie occupée par chaque circonscription géographique ou par chacune des divisions qu'on juge à propos d'établir, d'une teinte d'autant plus foncée qu'il s'agit de représenter des résultats numériques plus importants. Chaque teinte porte, sur la Carte elle-même ou sur une légende séparée, les indications chiffrées propres à déterminer sa valeur relative dans l'échelle de coloration des diverses régions. On peut éviter cette graduation numérique et donner aux diagrammes un caractère plus purement graphique en couvrant les surfaces partielles d'un réseau quadrillé à mailles d'autant plus serrées que le phénomène décrit présente une intensité plus grande. La valeur de l'interligne donne alors, à une échelle convenue, l'indication qui était précédemment fournie par un chiffre.

Ce mode de figuration ne doit pas être étendu à des faits qui se présentent avec des degrés d'intensité très variés. On ne peut, en effet, sous peine d'arriver à la confusion, multiplier au delà d'une mesure restreinte les teintes ou les hachures sur un même Tableau. Aussi doit-on, après avoir établi les moyennes du fait considéré pour chacune des divisions territoriales, classer ces moyennes en un petit nombre de groupes et consacrer une même teinte ou un même module de quadrillé aux diverses moyennes comprises dans l'amplitude relativement restreinte d'un même groupe [1].

---

[1] On trouve de nombreux spécimens de ces Cartes dans la *Géographie universelle* de E. Reclus. Voir aussi : Bertillon, *Démographie figurée de la France*, sect. B, 3e sér. — Broca, *Recherches sur l'ethnologie de la France*, dans les *Mém. de la Société d'Anthropologie*, 1860-1863. — Lagneau, *Répartition géographique de certaines infirmités en France*. — Boudin, *Traité de géographie et de statistique médicales*, t. II, p. 431, 551, 589. — Magitot, *Bulletin de la Société d'Anthropologie*, 2e série, t. II, p. 71. — Sistach, *Gazette médicale de Paris*, 1863, p. 725. — Bergeron, *Répartition des teignes*, etc. Paris, 1865. — Lunier, *Production et consommation des boissons alcooliques en France*. Paris, 1877. — Guibert, *Ethnologie armoricaine*, dans les *Mémoires du Congrès celtique international*. — Gournot, *Étude statistique sur la métallurgie du fer en France*, dans la *Revue scientifique de la France et de l'Étranger*, t. XXVIII, octobre 1881. Parmi les cartogrammes de cette première espèce qui figuraient à l'Exposition de 1878, nous citerons ceux : du Dr Lunier, sur la production et la consommation des boissons alcooliques en France; de M. Heuzé, sur la statistique agricole; de M. Vesselowski, sur la libération du territoire entre les mains des serfs russes émancipés; de M. Neumann Spallart, sur la statistique industrielle et agricole de l'Autriche.

120. Belpaire (1) et Minard (2) ont imaginé une autre disposition qui est surtout propre à représenter les variations de trafic sur les voies de communication d'un pays et sur les diverses sections de ces voies. Cette disposition consiste à figurer sur la Carte, au-dessus du tracé de chaque voie (route, chemin de fer, canal ou rivière), une bande colorée dont la largeur en chaque point est proportionnelle soit au tonnage des marchandises, soit au nombre des voyageurs, soit à la valeur argent des transports effectués. C'est, en somme, le diagramme à colonnes géographiquement distribué. La Section russe, à l'Exposition de 1878, présentait un grand nombre de *cartogrammes à bandes*, dressés d'après ce principe. L'*Album de Statistique graphique* publié en 1879 par le Ministère des Travaux publics (3) en contient quatre qui se rapportent respectivement au tonnage des rivières, canaux et ports de la France en 1877, au tonnage des routes nationales en 1876, au tonnage et à la recette des chemins de fer français en 1877.

Le même Ministère a publié, en 1880, un second *Album* qui contient douze cartogrammes à bandes. Ceux des planches V et VI figurent les tonnages des chemins de fer, des rivières, des canaux et des ports en 1878. Les bandes proportionnelles passées en couleurs sur le parcours de ces diverses voies représentent, à la même échelle sur les deux cartes, les courants de circulation. Elles permettent, non seulement de mesurer les services rendus par les voies exploitées, mais encore de préjuger les services qu'on doit attendre des voies à ouvrir. Les planches IX et X représentent, d'après le même principe, l'une les recettes brutes, l'autre les bénéfices nets des chemins de fer français en 1878. Ces résultats, ramenés au kilomètre, sont figurés à la même échelle; en sorte que la différence de largeur des bandes qui se correspondent géographiquement dans les deux cartes est proportionnelle aux frais d'exploitation. Les planches III et IV figurent

---

(1) *Notice sur les Cartes du mouvement du transport en Belgique.* Bruxelles, 1841.

(2) *Sur la circulation des chemins de fer et des canaux de la Belgique,* 1847. — *Des Tableaux graphiques et des Cartes figuratives,* 1861. Voir aussi Boris, *Renseignements comparatifs sur la fréquentation et les dépenses d'entretien des routes et chemins vicinaux du département du Jura,* dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* 1869, 1er semestre, p. 425, et *Pl.* CLXLI.

(3) Paris, Imprimerie nationale, 1879. Cet *Album* contient, outre les figurations cartographiques dont nous venons de parler, six Tableaux en coordonnées rectangulaires, représentant l'histoire financière des six grandes Compagnies françaises de chemins de fer depuis l'origine de ces Compagnies jusqu'à la fin de 1878. Trois courbes principales indiquent, dans chaque Tableau, la variation des cours les plus hauts, des cours les plus bas et des revenus. Seize autres diagrammes traduisent les mouvements d'importation et d'exportation des ports de commerce français depuis 186[illegible] jusqu'en 1878. Un dernier Tableau résume le mouvement du commerce français depuis 1828 jusqu'en 1878.

les frais de premier établissement des chemins de fer et des voies navigables, avec distinction, pour les chemins de fer, des subventions de l'État et des dépenses laissées à la charge des Compagnies. La planche II se rapporte aux conditions techniques d'établissement des voies ferrées. Elle présente, pour chaque ligne ou section de ligne, deux bandes juxtaposées, l'une directement proportionnelle au rayon minimum des courbes, l'autre inversement proportionnelle à la déclivité maxima du profil. La largeur totale des deux bandes étant dès lors d'autant plus grande que les lignes sont mieux tracées, elle peut, en quelque sorte, servir de mesure à la qualité technique de ces lignes; elle peut même fournir des indications utiles pour l'étude du tracé d'une nouvelle ligne à insérer dans un réseau de lignes exploitées. Quand on rapproche les trois diagrammes du tonnage, des recettes et des frais de premier établissement, on remarque, entre leurs bandes proportionnelles respectives, des conditions de similitude qui rendent presque superposables les traductions graphiques des trois lois étudiées séparément. On est ainsi amené à reconnaître que les lignes les plus fréquentées et les plus productives sont en même temps les plus coûteuses et les mieux établies. La planche XIV figure les conditions de navigabilité des diverses catégories des voies navigables. Les planches XI, XII et XIII complètent la série des cartogrammes à bandes figuratives [1]. Elles expriment l'importance de la circulation dans Paris, en 1878, d'après les recettes kilométriques des omnibus, des tramways, du chemin de fer de ceinture et des bateaux à vapeur.

121. On désigne sous le nom de *cartogrammes à foyers diagraphiques* une troisième catégorie de diagrammes-cartes, dans laquelle le centre de chacune des divisions géographiques considérées est pris comme foyer d'un petit diagramme spécial. Ce diagramme figure, d'après certaines conventions, la valeur moyenne d'un ou plusieurs phénomènes observés dans la région correspondante; l'ensemble des diagrammes locaux, établis suivant une règle uniforme, représente, d'une façon très expressive et très analytique à la fois, les lois générales de variation des mêmes phénomènes dans la totalité du pays.

Les cartogrammes diagraphiques sont dits à cercles proportionnels lorsqu'on se borne à figurer, sur chaque foyer régional, un cercle dont la

---

[1] Minard a dressé un cartogramme à bandes proportionnelles représentant les pertes essuyées par l'armée française pendant la campagne de Russie (1812). Le large ruban qui marque l'effectif au départ se trouve réduit, au retour, à une bande très mince. Il était déjà réduit à moins d'un quart de sa largeur primitive au moment où la retraite a commencé.

surface est proportionnelle à la valeur moyenne d'un fait observé. L'*Album de Statistique graphique de* 1880, cité plus haut, contient (*Pl.* VIII) un diagramme à cercles proportionnels figurant les recettes des stations des chemins de fer français en 1878. Une teinte spéciale est affectée à chaque réseau. Quand une station n'appartient qu'à un seul réseau, les recettes annuelles sont exprimées par la surface d'un cercle qui a son centre à la position géographique de la station considérée. La recette de 500000^{fr} est représentée par un cercle de 2^{mm} de rayon. La surface d'un cercle de rayon r, figurant une recette R, est donc

$$\pi r^2 = \frac{\pi 2^2}{500000} R;$$

d'où il suit qu'à un rayon r, mesuré sur la carte et exprimé en millimètres, correspond une recette

$$R = 500000 \frac{r^2}{4}.$$

On obtient facilement les rayons des cercles à tracer sur la carte en faisant usage de l'*abaque* de M. Lalanne, ou d'un petit diagramme parabolique auxiliaire qui dispense de tout calcul.

Quand deux réseaux aboutissent à une même station, leurs recettes respectives sont représentées par deux demi-cercles juxtaposés, affectés des teintes correspondantes. Dans le cas d'un nombre de réseaux supérieur à deux, chaque réseau est figuré par un secteur dont la surface est proportionnelle à sa recette.

Les diagrammes locaux sont disposés quelquefois de façon à grouper un grand nombre de résultats statistiques indépendants. Dans la planche I de l'*Album de Statistique de* 1880, la position géographique de chaque chef-lieu est un foyer autour duquel rayonnent, en forme de diagramme polaire, des secteurs concentriques et contigus dont les surfaces représentent, à une échelle de convention, l'importance de divers faits relatifs au développement des voies de communication à la fin de 1878. Sept secteurs de même rayon, dont l'ensemble complète le demi-cercle situé au-dessus de l'horizontale, représentent respectivement (rotation de gauche à droite) les longueurs des routes nationales, des routes départementales, des voies navigables, des chemins de fer et des trois classes des chemins vicinaux. Le secteur relatif à chacune de ces données figure avec sa teinte caractéristique dans toute la suite des diagrammes départementaux. Le demi-cercle, somme des secteurs, varie, d'un diagramme à l'autre, en raison directe de la longueur totale des voies de toutes sortes dans les diverses circonscriptions. Le quart de cercle inférieur, vers l'ouest, exprime, dans chaque département, le rapport entre le développement total des voies de

communication et la superficie territoriale. Le quart de cercle inférieur, vers l'est, exprime le rapport entre le même développement de voies et la population. La *fig.* 83 représente le diagramme local relatif au département de l'Ain.

Dans le cartogramme à foyers de la planche XV, chaque diagramme local présente, au-dessus de l'horizontale, six secteurs concentriques d'ouverture constante (30°) et de rayons variables, dont les surfaces figurent respectivement, en allant de gauche à droite, la qualité moyenne des matériaux d'empierrement des routes nationales, la fréquentation de ces routes, exprimée en colliers, la consommation de matériaux d'empierrement, le prix d'achat des matériaux par mètre cube, leur prix d'emploi et leur prix total, achat et emploi, ramenés à la qualité 10. Les échelles et unités adoptées pour figurer ces divers résultats sont telles, que la surface d'un secteur de $0^m,02$ de rayon correspond à des matériaux de qualité 20, à une fréquentation de 500 colliers, à une consommation de 20^{mc} de matériaux, ramenés à la qualité 10, par kilomètre et par 100 colliers, et à 20^{fr} par mètre cube de matériaux : 1° fournis, 2° employés, 3° fournis et employés. Dans le diagramme particulier au département de la Loire, par exemple (*fig.* 84), la qualité moyenne des matériaux étant 14,20, le prix de fourniture étant $10^{fr},05$ et le prix d'emploi $5^{fr},36$, ensemble $15^{fr},41$, le prix total par mètre cube, ramené à la qualité 10, sera

Fig. 83.

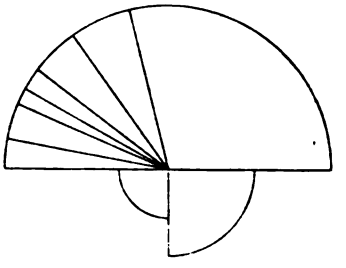
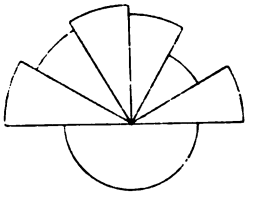


Fig. 84.



$$15,41 \times \frac{10}{14,20} = 10,86.$$

Quant aux rayons du premier et du sixième secteur, ils seront respectivement

$$0,02\sqrt{\frac{14,20}{20}} = 0^m,017 \quad \text{et} \quad 0,02\sqrt{\frac{10,86}{20}} = 0^m,015.$$

Le demi-cercle tracé au-dessous de l'horizontale de la *fig.* 84 exprime le rapport entre le cube des aménagements de matériaux et le cube total de la consommation. Le rayon de ce demi-cercle est égal à $0^m,01$ lorsque la consommation absorbe exactement les quantités aménagées. Il s'ensuit que

si le rapport des aménagements à la consommation est 0,79, comme dans la Loire, ce résultat est exprimé par un demi-cercle de rayon

$$r = 0,01\sqrt{79} = 0^{m},0089.$$

Le cartogramme de la planche XVI offre encore quelques dispositions intéressantes à signaler. Il exprime le développement des chemins de fer dans les principaux États, de 1830 à 1878. La position géographique de la capitale de chaque État est le centre d'une circonférence divisée en six arcs égaux. Les six points de division sont les centres d'autant de circonférences teintées, dont les surfaces sont respectivement proportionnelles au développement absolu des voies ferrées, dans l'État considéré, en 1830, 1840, 1850, 1860, 1870 et 1878. Le rayon de l'un quelconque de ces cercles est donné par la formule

$$r = 0^{m},01\sqrt{\frac{n}{30\,000}},$$

dans laquelle n représente le nombre de kilomètres du réseau, dans l'État correspondant et à la date considérée, et $0^{m},01$ le rayon du cercle dont la surface exprime un développement de $30\,000^{km}$.

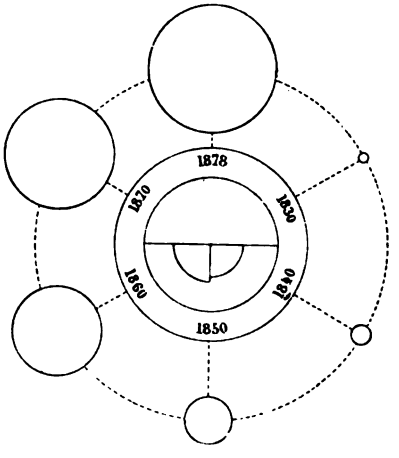
Au-dessous de l'horizontale qui passe par le centre de chaque État sont deux quarts de cercle adjacents, décrits de ce centre, et qui expriment respectivement le rapport de la longueur du réseau en 1878 à la population et à la superficie du territoire. Le diagramme particulier à la France est représenté par la *fig.* 85 (1).

122. Les cartogramms à foyers diagraphiques permettent de mener de front, sur une seule carte, les figurations d'un assez grand nombre de faits distincts; mais ils ne font pas toujours ressortir, avec une clarté suffisante, la valeur relative de chacun de ces faits dans les divers lieux d'ob-

(1) Nous citerons encore, parmi les représentations du même système qui ont figuré à l'Exposition de 1878 : une Carte du Ministère des Travaux publics, relative à la production de l'industrie minérale en France; trois Cartes du Dr Engel sur la distribution des forces motrices (eau, vent, vapeur) en Prusse, et sur la répartition des populations rurales et industrielles dans le même pays; une Carte de la mortalité cholérique dans le Brabant, dressée par le Dr Janssens, avec seize expressions distinctes pour graduer l'intensité des faits; une Carte de M. Loua, représentant la répartition des étrangers en France, par départements, avec distinction des nationalités. On trouvera enfin des applications variées des mêmes principes dans les vingt et une cartes qui composent l'*Album de Statistique graphique* publié en 1881. La dernière de ces cartes, figurant l'invasion phylloxérique, l'étendue des vignobles et la production vinicole de la France, de 1856 à 1880, est une application combinée du cartogramme à teintes degradées et du cartogramme à foyers diagraphiques.

servation. Les cartogrammes à teintes dégradées satisfont en quelque mesure à cette condition, lorsque les résultats numériques à figurer se réduisent à un assez petit nombre de moyennes et n'exigent pas l'emploi d'une gamme trop complète de nuances ou de quadrillés; mais ce mode de représentation perd toute clarté lorsque, voulant entrer plus avant dans l'analyse d'un fait statistique, on est conduit à figurer un trop grand nombre de moyennes. On a recours, en ce cas, aux *cartogrammes à courbes d'égal élément* ou *isoplèthes*, sortes de tableaux graphiques à double entrée (**104** et **116**), dans lesquels les variables x et y sont les coordonnées géographiques des localités sur lesquelles a porté l'observation du fait à représenter. La troisième coordonnée z varie proportionnellement à l'intensité du même fait, et les courbes figurées, raccordant sur la carte tous

Fig. 85.



les points d'égale intensité, sont les projections des sections horizontales équidistantes pratiquées dans la surface continue qui passerait par les extrémités de toutes les ordonnées z. Chaque courbe est affectée d'un indice numérique correspondant à l'intensité du phénomène dans toute la suite des points géographiques qu'elle raccorde.

La principale difficulté pratique que l'on rencontre dans le dressement des cartogrammes statistiques, à courbes d'égal élément, tient à ce que les relevés numériques ne fournissent pas des valeurs de z pour chacun des points de la carte, mais seulement des valeurs moyennes correspondant à des circonscriptions territoriales plus ou moins étendues. La surface théorique continue se trouve ainsi remplacée par un relief à gradins horizontaux formant la limite supérieure de prismes juxtaposés, qui ont chacun

pour base une circonscription et pour hauteur sa moyenne statistique. Il s'agit de reconstituer, avec ce relief à facettes, un relief continu, s'approchant autant que possible de la surface réelle. L'une des conditions essentielles de cette transformation est que la nouvelle surface partielle, substituée au plan supérieur de chaque prisme régional, serve de limite à un solide de même volume que ce prisme. On réalise cette condition en remplaçant, dans un assez grand nombre de sections transversales du relief, le profil à échelons des sommets de prismes par une courbe compensatrice continue. La compensation peut être fournie par une infinité de courbes; mais, si les circonscriptions ont été convenablement multipliées, on est guidé vers une solution assez approchée par le mouvement général que les profils à échelons n'ont pas cessé d'accuser, malgré la déformation produite par les moyennes. Les profils en travers à courbes continues étant ainsi déterminés, on rentre, pour la construction des courbes de niveau, dans la règle générale commune à toutes les surfaces topographiques [1].

Les cartogrammes à courbes isoplèthes sont fréquemment employés en Météorologie. Leur usage s'est même vulgarisé à tel point qu'un certain nombre de feuilles périodiques joignent à leur bulletin météorologique une carte figurative des courbes d'égale pression et de divers phénomènes en connexion avec les irrégularités de distribution accusées par le baromètre. La *fig.* 86 représente, d'après ce système, les isobares et les directions des vents dans le nord-ouest de l'Europe le 29 novembre 1874, à 8^h du matin. Le nombre marqué sur chaque isobare est la cote de hauteur barométrique commune à tous les points de son trajet. Dans le cas particulier de la figure, les courbes se ferment autour d'espaces où les lectures barométriques sont plus basses que dans les régions voisines extérieures, ce qui est la condition caractéristique d'une aire *cyclonique* ou de dépression. Les vents très faibles sont indiqués par de petits cercles; les vents plus forts

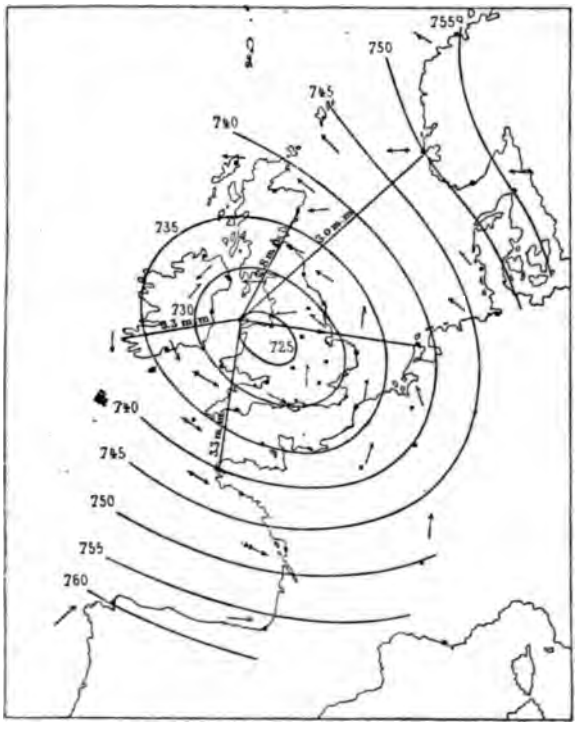
---

[1] M. VAUTHIER a dressé, dans ce système, plusieurs cartes statistiques qui figurent la répartition de la population de Paris et de la France; le mouvement de la population, de 1872 à 1876; la natalité générale de la France, de 1856 à 1865; la matrimonialité dans la même période; la mortalité des enfants, de zéro à 1 an et de 1 à 5 ans; l'état de l'instruction en France; la France électorale au 20 février 1876. C'est en 1872 que M. VAUTHIER a fait sa première application des courbes de niveau au cartogramme figuratif de la population parisienne. On sait (note de la page 157) que, dans sa Communication de février 1845 à l'Académie des Sciences, M. LALANNE avait déjà décrit ce procédé graphique avec précision. (Voir, pour plus de détails sur la construction, la coloration et l'emploi des cartogrammes statistiques à courbes d'égal élément : VAUTHIER, *Cartes statistiques à reliefs, Notice explicative*. Paris, mai 1878. — Voir aussi, CHEYSSON, *les Méthodes de statistique graphique à l'Exposition universelle de* 1878, dans les *Conférences internationales de statistique tenues à Paris les* 22, 23 *et* 24 *juillet* 1878. Paris, 1880.)

par des flèches placées suivant leur direction et marquées d'un nombre de pennes d'autant plus grand que le mouvement est plus rapide. Il est aisé de voir que le vent souffle autour du centre de dépression à l'inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre, et suivant des directions à peu près parallèles à celles des isobares, mais avec une tendance à se rapprocher du centre des plus basses pressions [1].

Les mouvements de l'atmosphère tiennent essentiellement aux ruptures

Fig. 86.



d'équilibre accusées par les variations de la colonne barométrique. Ils sont d'autant plus violents et rapides que la différence de pression est plus

[1] Si les cotes de hauteur barométrique allaient en croissant vers l'isobare intérieure, la surface figurative des pressions présenterait un sommet saillant, au lieu d'un cratère, et la perturbation serait *anticyclonique*. Les flèches accuseraient alors un mouvement circulaire en sens inverse du précédent, avec tendance à s'éloigner de la courbe culminante. Ainsi se trouve mis en relief le principe formulé par Buys-Ballot, à savoir que si, dans l'hémisphère nord, un observateur tourne le dos au vent, le baromètre est plus bas à sa gauche qu'à sa droite. Dans l'hémisphère sud, les sens de rotation sont inverses, et la proposition doit être renversée. (Voir, pour plus de

grande entre deux stations données. Le rapport de cette différence à la distance des deux stations constitue ce qu'on pourrait appeler la *pente barométrique*, entre les mêmes stations, de la surface topographique définie par les isobares. On a donné à ce rapport le nom de *gradient*. Les gradients sont exprimés en millimètres de la colonne barométrique, rapportés au degré de 60 milles nautiques, pris pour unité de distance. On voit sur la figure un faisceau de droites rayonnant de Holyhead vers Valentia, Aberdeen, Skudesnaes, le Helder et Brest. Ces droites, affectées d'un indice numérique, sont les projections des gradients déterminés entre la station centrale et chacune des autres. On voit immédiatement que les vents soufflent dans des directions à peu près perpendiculaires à celles de ces droites, et avec d'autant plus de force que les gradients ont une plus grande valeur. Pour déterminer le point où un gradient est coupé par une isobare, dont la cote barométrique est comprise entre les lectures aux deux stations extrêmes, on opère comme s'il s'agissait de construire, sur une surface topographique proprement dite, l'intersection d'une courbe de niveau et d'un profil.

IV. — Stéréogrammes.

123. On nomme *stéréogramme* (1) la figure en relief qui représente effectivement dans l'espace une fonction à trois variables ou une table à double entrée. Zeuner, le premier, a proposé de traduire les phénomènes démographiques par des représentations à trois axes (2).

---

détails et pour un grand nombre d'autres applications des isoplèthes aux cartes météorographiques, ROBERT H. SCOTT, *Cartes du temps et avertissements de tempêtes*, traduction de ZURCHER et MARGOLLÉ, Paris, 1879; MARIÉ-DAVY, *Météorologie générale*, etc. Paris, 1877; POINCARÉ, *Distribution et marche des pluies dans le département de la Meuse, etc.*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1873, 2e semestre, p. 227, et *Pl.* XXII, XXIII.)

(1) Cette dénomination a été proposée par le professeur MESSEDAGLIA.

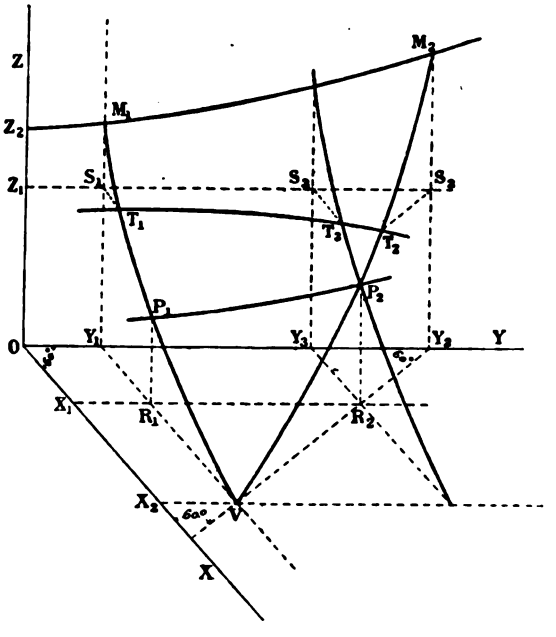
(2) Le stéréogramme théorique proposé par ZEUNER diffère de celui que nous allons expliquer en ce qu'il est rapporté à trois axes rectangulaires. (Voir *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*, von Dr GUSTAV ZEUNER; Leipzig, 1869).

La traduction graphique des faits démographiques a donné naissance à divers systèmes de représentations planes rapportées à deux axes. Nous citerons notamment le système de KNAPP (*Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik*, Leipzig, 1868, et *Theorie des Bevölkerungs-Wechsels. Abhandlungen zur angewandten Mathematik*. Braunschweig, 1874); celui de BECKER (*Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen*, Berlin, 1874); celui de LEXIS (*Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik*, Strassburg, 1875), et celui de LEWIN (*Rapport sur la détermination et le recueil des données relatives aux tables de mortalité. Programme de la neuvième session du Congrès international de Statistique à Budapest*, Budapest, 1876). On trouve un exposé sommaire de ces divers systèmes dans les Mémoires cités plus loin de M. PEROZZO.

Soient (*fig.* 87) OY, OZ deux axes rectangulaires situés dans le plan du tableau, OX un troisième axe faisant avec OY, dans le plan horizontal YOX, un angle de 60°.

L'axe OY est celui des époques de naissance des diverses classes de sujets dont on étudie la collectivité; l'axe OZ, celui du nombre de ces sujets d'après la statistique. En d'autres termes, si Y_1M_1 est une ordonnée proportionnelle au nombre des naissances constatées pendant une certaine année, Y_1, OY_1 sera une abscisse proportionnelle au nombre d'années com-

Fig. 87.



prises entre Y_1 et une année antérieure, prise comme date d'origine des observations à figurer.

L'axe OX est celui des âges; en sorte que, si le segment OX_1 est proportionnel à la durée comprise entre la date d'origine O et une certaine année X_1, l'ordonnée du relief au point X_1 sera proportionnelle au nombre des individus qui, nés à l'époque O, sont vivants à l'époque X_1 et, par conséquent, âgés de OX_1 années. Pareillement, l'ordonnée R_1P_1, telle que Y_1R_1 soit égal et parallèle à OX_1 est proportionnelle au nombre des individus qui, nés en l'année Y_1, sont vivants et âgés de OX_1 années, $OY_1 + OX_1$ années après la date prise pour origine de la figure.

En général, toute ordonnée, telle que R_1P_1, située dans une section plane $M_1Y_1R_1P_1$ parallèle au plan des xz, représente la fraction survivante à l'âge OX_1 des Y_1M_1 individus nés à l'époque Y_1. Le relief du stéréogramme est donc coupé par toute section parallèle au plan des xz suivant une courbe M_1P_1V, dite *ligne des survivants*. Cette courbe représente, en effet, la loi de survivance (et, par différence, la loi de mortalité) des individus nés en l'an Y_1. Elle rencontre le plan des xy lorsque le dernier survivant de la classe Y_1 a disparu, c'est-à-dire en un point V, tel que Y_1V représente environ cent années à l'échelle de la figure. Le lieu des traces V s'écarte peu de la parallèle X_2V à l'axe OY.

On voit immédiatement que les plans parallèles à celui des yz coupent la surface suivant une seconde série de courbes, telles que P_1P_2, dont les ordonnées R_1P_1, R_2P_2, ... sont respectivement proportionnelles aux nombres d'individus des classes Y_1, Y_3, ..., qui étaient vivants OX_1 années après leur naissance. Les courbes P_1P_2 sont dites *lignes des individus du même âge*. La courbe M_1M_2, dite *ligne des naissances*, n'en est qu'un cas particulier correspondant à l'âge zéro.

Les plans parallèles à celui de xy coupent la même surface suivant une troisième espèce de courbes, qu'on nomme *isodémiques*, parce que tous les points de l'une quelconque d'entre elles, T_1T_2, ont même ordonnée OZ_1, et correspondent à un même nombre d'individus. Ces courbes permettent de relever, par exemple, que les classes Y_1, Y_3, ... avaient OZ_1 survivants, respectivement S_1T_1 et S_3T_3 années après leur naissance, ou respectivement $Z_1S_1 + S_1T_1$ et $Z_1S_3 + S_3T_3$ années après la date d'origine O. Les courbes isodémiques seraient, dans la disposition de la figure, les isoplèthes du Tableau graphique à double entrée, dressé d'après la méthode Lalanne pour être substitué au relief démographique.

Considérons maintenant une section plane M_2Y_2V pratiquée dans la surface, non plus, comme précédemment, suivant l'une des trois directions parallèles aux plans coordonnés, mais perpendiculairement à la bissectrice intérieure de l'angle XOY. On détermine ainsi une quatrième espèce de courbes, M_2P_2V, dont il est aisé de trouver la signification. Soit P_2 un point de l'une quelconque de ces courbes. L'ordonnée R_2P_2 représente, ainsi qu'on l'a vu, le nombre des survivants de la classe Y_3 qui ont atteint l'âge de Y_3R_2 années. Ce nombre sera donné par le recensement de la population à une époque postérieure de $OY_3 + Y_3R_2$ années à la date d'origine de la figure. Mais le triangle $R_2Y_3Y_2$ étant équilatéral par construction, on a

$$OY_3 + Y_3R_2 = OY_2,$$

ce qui revient à dire que les survivants R_2P_2 de la classe Y_3 seront recensés

à l'âge OX_1 et en l'année Y_2; car on a eu soin de mesurer le temps à la même échelle sur les axes OX, OY. On voit par là que les ordonnées de la courbe M_2P_2V figurent la suite complète des individus de tout âge recensés en l'année Y_2, depuis les survivants des M_2Y_2 enfants nés pendant la même année jusqu'au dernier survivant V de la classe Y_1, qui était né environ cent ans avant. Les courbes de l'espèce M_2V sont dites *lignes des recensés*.

La surface démographique présente donc quatre espèces intéressantes de courbes planes. On y distingue aussi des lignes à double courbure dont il sera question plus loin.

124. Appliquons les considérations théoriques qui précèdent à la traduction en relief d'une suite de faits démographiques réellement observés.

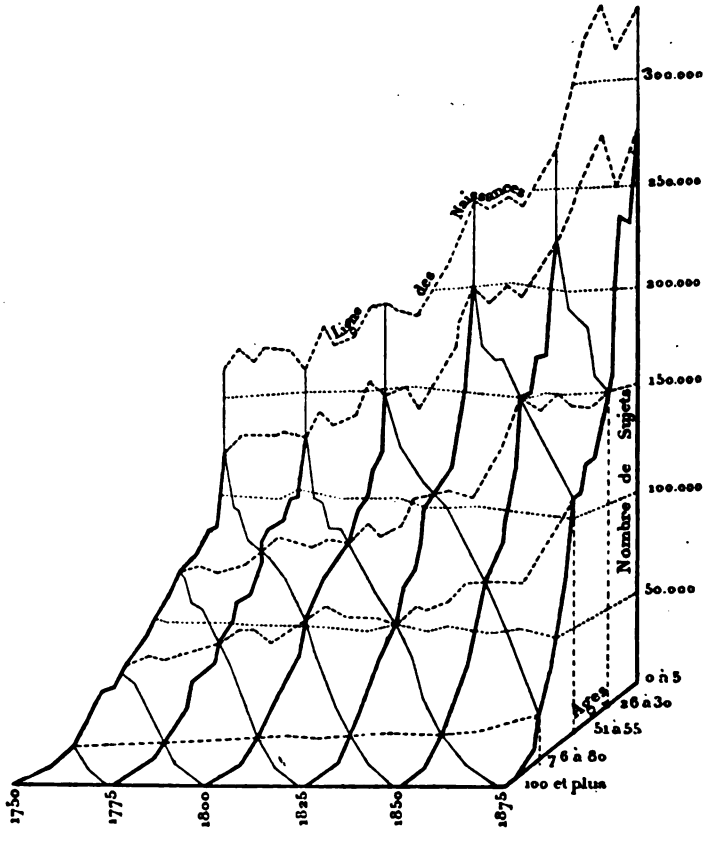
La Suède possède, depuis plus d'un siècle, des recensements par périodes quinquennales et par âges. M. Berg en a d'abord figuré les résultats, depuis 1750 jusqu'en 1875, sur un diagramme plan dans lequel le temps est porté en abscisses et le nombre d'individus en ordonnées. Sur l'ordonnée relative au recensement de 1825, par exemple, on porte successivement, et toujours à partir de l'axe des abscisses, des longueurs proportionnelles : (a) au nombre total des sujets nés vivants dans la précédente période quinquennale (1820-1825); (b) au nombre des mêmes sujets qui, n'ayant pas succombé, étaient âgés de 0 à 5 ans au recensement de 1825; (c) au nombre de sujets qui avaient de 5 à 10 ans au même moment, et ainsi de suite. Chacun des segments décroissants de la même ordonnée représente donc une classe de vivants ayant pour caractère commun que la date de leur naissance est comprise dans une même période quinquennale antérieure. Si l'on opère de même pour chaque recensement quinquennal, il suffira de raccorder entre eux, par des traits rectilignes, les sommets des ordonnées (a), puis les sommets des ordonnées (b), ..., pour avoir une série de lignes brisées, dont la première figure la loi de développement des naissances, chacune des autres figurant le mouvement d'une catégorie de sujets âgés de n à $n + 5$ années. On a ainsi toute la suite des *lignes des individus de même âge* (123).

On remarquera, d'autre part, que les sujets âgés de 5 à 10 ans et figurés par l'ordonnée (c) au recensement de 1825, par exemple, sont les survivants des sujets âgés de 0 à 5 ans et figurés par l'ordonnée (b) au recensement de 1820. Il suit de là que, si l'on raccorde, en s'écartant de l'origine, le sommet (b) d'une ordonnée au sommet (c) de la suivante, celui-ci au sommet (d) de la suivante, et ainsi de suite, on obtient une ligne brisée de nouvelle espèce, qui figure le mouvement décroissant d'une génération dont toutes les naissances sont comprises dans une même période quinquennale. En opérant de même pour chacune des périodes, on obtient

la série des *lignes de survivants*. Quant aux *lignes des recensés*, que nous avons aussi distinguées dans le relief théorique, elles se confondent ici avec les verticales sur lesquelles se superposent les ordonnées de chaque recensement.

Cela posé, il est aisé de passer du diagramme plan à un stéréogramme figurant les mêmes phénomènes d'une manière plus saisissante et permettant d'ailleurs diverses constructions et déductions qu'un tableau à deux axes ne comporte pas. La *fig.* 88 est une perspective, réduite à ses lignes

Fig. 88.



principales, du stéréogramme démographique de la population mâle suédoise depuis 1750 jusqu'en 1875, construit par M. Perozzo, d'après les données qui avaient déjà servi à dresser le Tableau de M. Berg. Les axes sont disposés comme nous l'avons indiqué plus haut (**123**); il en résulte

que les deux séries de sections planes verticales, donnant les lignes des survivants et les lignes des recensés, sont inclinées symétriquement à 60° sur le plan des yz. Les lignes des recensés sont en traits de force pleins, celles des survivants en traits pleins plus légers, les lignes d'âge en petits traits interrompus, et les isodémiques en pointillés. On distingue sur le relief chacune de ces catégories de lignes par une teinte spéciale.

On adopte les lignes des recensés comme profils en travers générateurs de la surface à construire. A cet effet, sur une planchette en forme d'équerre, affectée à chaque recensement, on trace, d'après les échelles adoptées pour les âges et pour les nombres de sujets, la ligne des recensés fournie par l'observation quinquennale correspondante. Après avoir découpé cette ligne sur l'équerre, dont elle remplace l'hypoténuse, on place la planchette dans la position M_2Y_2V de la *fig.* 87, le sommet de l'angle droit étant au point Y_2 qui marque sur l'axe des y, à l'échelle adoptée, la date du recensement. On fixe de même à leurs positions équidistantes, dans le dièdre formé par les plans coordonnés XOY, YOZ, les équerres relatives à la suite des recensements. On a ainsi, dans l'espace, toutes les lignes de recensés, et l'on construit consécutivement, au moyen de petites réglettes ou de fils diversement colorés, les lignes planes de même âge, d'égale population et de survivance.

Le stéréogramme se prête à la construction de diverses autres lignes dont la vue fournit immédiatement d'utiles renseignements sur la manière d'être du groupe démographique considéré.

On peut se demander, par exemple, à quel âge limite il faudra s'arrêter dans les relevés d'un certain recensement pour que l'ensemble des sujets de cet âge et au-dessous soit une fraction déterminée $\frac{1}{n}$ de la population totale au même moment. Cet âge limite sera OX_1 (*fig.* 87) si l'ordonnée R_2P_2 ferme le périmètre d'une aire trapézoïdale $M_2Y_2R_2P_2$, égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de l'aire totale M_2Y_2V qui figure toute la population recensée à la date Y_2. A la même fraction $\frac{1}{n}$ correspond un point tel que P_2 sur chacune des courbes telles que M_2V. En raccordant tous ces points sur le relief, on obtient une ligne à double courbure qui est la *ligne isotomique des recensements* relative à la fraction $\frac{1}{n}$. A chaque valeur de n correspond une isotomique différente. Pour $n = 2$, l'ordonnée R_2P_2 divise l'aire totale M_2Y_2V en deux parties égales; l'âge $OX_1 = Y_2R_2$ est alors l'*âge moyen* de toute la population recensée à la date Y_2. La suite des points P_2, déterminés par la condition $n = 2$, donne l'*isotomique des âges moyens* relatifs aux divers recensements.

On peut encore considérer, non plus les sections M_2V, relatives aux recensements, mais les sections de survivance M_1V, et déterminer, par des considérations analogues aux précédentes, des lignes d'une nouvelle espèce, dites *isotomiques des générations* (1).

125. M. Perozzo (2) a fait une ingénieuse application du stéréogramme à trois axes orthogonaux aux relevés de nuptialité fournis par la statistique italienne pendant les cinq années comprises entre 1872 et 1876. Les sujets de chacun des deux sexes étant groupés par classes quinquennales d'âges, on forme une table numérique à double entrée, dont le premier argument, composant la première colonne de gauche, est donné par les mariés hommes de 100 ans et au-dessus (limite théorique extrême), de 95 ans et au-dessus, et ainsi de suite, en retranchant cinq années d'une ligne à la suivante, jusqu'à l'extrême limite opposée de 15 ans et au-dessus. Le second argument, composant la première ligne horizontale de la table, est donné par les mariées femmes groupées de la même manière, à cette différence près que la seconde limite est, en ce cas, de 10 ans et au-dessus. Chaque case de la table reçoit le nombre qui correspond à ses deux arguments particuliers. Par exemple, la ligne horizontale marquée $40 - \omega$ (40 ans et au-dessus) dans la première colonne de droite et la colonne verticale marquée $30 - \omega$ sur la première ligne supérieure déterminent par leur intersection une case dans laquelle figure le nombre 77 168; ce qui exprime que, pendant toute la période quinquennale considérée, 77 168 hommes âgés de 40 ans et plus ont épousé pareil nombre de femmes âgées de 30 ans et plus. La case correspondant aux deux limites $15 - \omega$ pour les hommes, $10 - \omega$ pour les femmes, comprend évidemment tous

(1) Pour les diverses déductions et évaluations anticipées à tirer du diagramme de Berg et du stéréogramme correspondant, voir J. Bertillon, *Mode de prévision de la statistique des naissances*, dans *la Nature*, Paris, 1878, n° 282. — J. Bertillon, *Note sur le diagramme de* Berg et Elis Sidenbladh, *Relation entre le nombre des nés-vivants et celui de leurs survivants en Suède*, dans les *Annales de Démographie internationale*, Paris, 1879, n° 9. — A. Chervin, *Rapport sur la cartographie démographique à la section des Sciences anthropologiques à l'Exposition universelle de* 1878, dans les *Comptes rendus du Congrès international de démographie*, annexe 6, p. 261, Paris, Imprimerie nationale, 1879. — L. Perozzo, *Statistique graphique. Sur la représentation graphique d'une collectivité d'individus dans la succession du temps, et en particulier sur les diagrammes à trois coordonnées*, Rome, 1880.

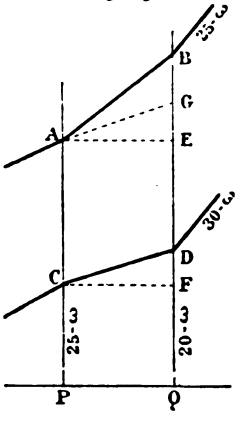
(2) Luigi Perozzo, *Stereogrammi demografici, seconda Memoria*, Roma, 1881. — Voir aussi, dans une brochure plus récente du même auteur (*Stereogramma della tariffa speciale n° 3 — Derrate alimentari — a grande velocità delle Ferrovie dell' Alta Italia*), la description d'un stéréogramme dont les trois éléments sont le prix d'expédition z, la distance de transport x et le poids y, et dont la surface, $z = kx^{y^2}$, est un paraboloïde hyperbolique.

les mariages de la période et porte, en effet, le nombre 1 081 203, fourni par l'état civil.

Cela posé, on prend trois axes rectangulaires. Sur celui des x on porte la notation $100 - \omega$ à l'origine et successivement, aux points équidistants donnés par une échelle de convention, les notations $95 - \omega, \ldots, 15 - \omega$, correspondant aux diverses classes totales quinquennales d'hommes. On porte pareillement et à la même échelle sur l'axe des y les notations depuis $100 - \omega$ jusqu'à $10 - \omega$, relatives aux classes de femmes. Enfin, au point des xy déterminé par l'intersection des coordonnées horizontales relatives à une classe totale d'hommes, $h - \omega$, et à une classe totale de femmes, $f - \omega$, on élève une ordonnée verticale z proportionnelle au nombre de mariages contractés entre des hommes âgés de plus de h années et des femmes âgées de plus de f années. Les sommets de toutes les ordonnées z constituent le relief continu de la surface démographique de nuptialité. Une section plane parallèle aux yz et passant par un point tel que $30 - \omega$ de l'axe des x donne la courbe figurative des mariages entre les hommes âgés de plus de 30 ans et les femmes de tous âges; de même la section $25 - \omega$ parallèle aux xz figure les mariages des différentes classes d'hommes avec les femmes de 25 ans et au-dessus.

Dans chacun de ces deux systèmes de sections, l'aire comprise entre la courbe et le plan des xy est évidemment très petite ou nulle au voisinage de l'origine $100 - \omega$. Par suite du mode de cumulation adopté, cette aire va croissant à mesure qu'on s'éloigne de l'origine, en sorte que, sur le profil extrême $15 - \omega$ relatif aux hommes, on peut figurer les projections en vraie grandeur de toutes les autres courbes masculines et sur le profil extrême $10 - \omega$ relatif aux femmes les projections de toutes les courbes féminines. Ces projections permettent de déterminer, au moyen de constructions graphiques très simples, certains résultats utiles que le stéréogramme ne donne pas directement.

Fig. 89.



Soit à rechercher, par exemple, combien d'hommes de 25 à 30 ans ont épousé, dans la période pour laquelle le relief a été construit, des femmes de 20 à 25 ans. Les courbes AB, CD (*fig.* 89) sont les projections des courbes masculines $25 - \omega$, $30 - \omega$, sur le plan $15 - \omega$ de la dernière de ces courbes; les droites AP, BQ sont les projections sur le même plan des courbes féminines $25 - \omega$, $20 - \omega$. Le segment AP, projection en vraie grandeur de l'ordonnée du point A, est propor-

tionnel au nombre de femmes de 25 ans et plus qui ont épousé des homm de 25 ans et plus; BQ est proportionnel au nombre de femmes de 20 a et plus qui ont épousé des hommes de 25 ans et plus; par suite, BE = BQ — représente le nombre de femmes de 20 à 25 ans qui ont épousé des homm de 25 ans et plus.

De même, DF = DQ — CP représente le nombre de femmes de 20 à 25 ans qui ont épousé des hommes de 30 ans et plus, et finalement le segment BG = BE — DF, qu'on obtient en menant par le point A la parallèle à CD, représente le nombre de femmes de 20 à 25 ans qui ont épousé des hommes de 25 à 30 ans.

On serait arrivé au même résultat et par des constructions analogues si l'on avait considéré, sur la section féminine extrême $10 - \omega$, le trapèze compris entre les ordonnées masculines $25 - \omega$, $30 - \omega$, et les courbes féminines $25 - \omega$, $20 - \omega$.

Ce trapèze et le précédent ne sont, du reste, que les projections de la figure formée sur le stéréogramme par les deux courbes masculines et les deux courbes féminines considérées.

Des lignes d'une troisième espèce marquent sur le relief les traces de sections horizontales équidistantes. Chacune d'elles est affectée de sa cote, qui est le nombre z de mariages compris entre la section considérée et le plan des xy. Si z_1 représente la plus grande valeur de z, c'est-à-dire la totalité des mariages figurés, la section $\frac{z_1}{2}$, qui divise la hauteur du solide en deux parties égales, indiquera à quels âges des deux séries de conjoints correspond la moitié des mariages. Dans le cas considéré, cette section est comprise entre les extrémités supérieures des courbes féminines $20 - \omega$ et $25 - \omega$, mais plus près de cette dernière courbe que de la précédente.

L'âge moyen des épouses est donc compris entre 20 et 25 ans et, plus approximativement, entre 23 et 24 ans, ainsi qu'on le vérifie par une simple interpolation à vue.

La même section est comprise entre les courbes masculines $25 - \omega$ et $30 - \omega$, d'où l'on déduit que l'âge moyen des époux est compris entre 25 et 30 ans. L'interpolation donne à peu près 28 ans.

126. M. Perozzo a construit aussi des stéréogrammes démographiques à coordonnées polaires.

Pour déterminer, dans ce système, l'aire et la courbe d'un recensement, on trace, dans un plan vertical, à partir d'un point pris pour pôle et du même côté de la verticale passant par ce point, les dix-neuf rayons nécessaires pour diviser 180° en vingt ouvertures angulaires égales, correspondant aux vingt classes quinquennales d'âges comprises entre 0 et 100 ans.

Le plus grand de ces rayons, correspondant à la classe de 0 à 5 ans, fait un angle de 9° avec la partie supérieure de la verticale. L'angle est de 18° pour le rayon de 5 à 10 ans, et ainsi de suite jusqu'au rayon de 95 à 100 ans, qui se confond en direction avec la partie inférieure de la verticale. On porte, sur chaque rayon, à partir du centre commun, une longueur proportionnelle au nombre d'individus recensés de la classe quinquennale correspondante. Les rayons vont en décroissant à mesure que l'écartement angulaire augmente; celui de la classe 95 à 100 ans est nul ou très petit. En raccordant les extrémités de tous ces rayons, on obtient, en coordonnées polaires, la courbe ou, plus exactement, la ligne brisée des recensés.

On opère de même pour chaque recensement quinquennal, et l'on dispose la suite des aires planes ainsi obtenues de telle manière que leurs pôles et les verticales passant par ces pôles coïncident. Les plans méridiens des aires sont, d'ailleurs, régulièrement distribués autour de leur axe commun, en sorte que, si le relief doit figurer n recensements quinquennaux, les plans de deux recensements consécutifs se couperont sous un angle de $\frac{360°}{n}$.

Les diagrammes polaires des recensements étant ainsi placés et découpés, on tracera les lignes des survivants en remarquant que, pour suivre une même génération, il faut descendre d'une classe d'âge quand on passe d'un recensement quinquennal au suivant. On joindra, par exemple, l'extrémité du rayon 0-5 du profil de 1750 à l'extrémité du rayon 5-10 du profil de 1755, et ainsi de suite.

Les surfaces isodémiques sont des sphères ayant pour centre commun le pôle de tous les profils et les lignes isodémiques sont les intersections du stéréogramme par ces sphères.

Les lignes des recensés étant planes, on construit aussi aisément les lignes isotomiques des recensements dans le système polaire que dans le système à trois axes (124).

On obtient des stéréogrammes d'une lecture plus facile en réduisant de moitié, sur le diagramme des recensements, les ouvertures angulaires égales qui correspondent à chaque classe d'âge. L'amplitude totale du diagramme est ainsi réduite de 180° à 90°, et le rayon de 95 à 100 ans, qui coïncidait précédemment avec la verticale du pôle, devient horizontal dans la nouvelle disposition.

On trouve d'ailleurs commode, pour l'exécution matérielle du solide, de ne pas faire coïncider les verticales passant par les pôles des divers diagrammes, et de les distribuer suivant les génératrices équidistantes d'un cylindre à base circulaire de quelques centimètres de diamètre.

Les sphères isodémiques sont alors remplacées par des tores à section circulaire [1].

V. — Appareils inscripteurs.

127. La traduction graphique des résultats d'observations devait naturellement conduire à leur enregistrement automatique [2]. Un phénomène

---

[1] M. le professeur THURSTON a récemment proposé un système de stéréogrammes propres à figurer les variations d'un phénomène qui est lui-même fonction de trois variables. On sait que si, d'un point quelconque, pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, la somme de ces perpendiculaires est égale à la hauteur du triangle. Si cette hauteur, divisée en cent parties égales, représente, par exemple, cent parties d'un alliage formé de trois métaux, chacune des perpendiculaires pourra être considérée comme représentant le nombre de parties de chacun des trois métaux dans la constitution de l'alliage. Chaque point de l'intérieur du triangle correspondra donc à un de ces alliages et à un seul; et si l'on élève en chacun de ces points, perpendiculairement au plan du triangle, une ordonnée proportionnelle, soit à la limite d'élasticité, soit à la charge de rupture, soit à toute autre propriété de l'alliage correspondant, la surface topographique formée par les extrémités de toutes les ordonnées représentera la loi de variation de la propriété qu'on aura considérée. On pourra d'ailleurs remplacer le stéréogramme construit d'après ce principe par un plan à courbes de niveau cotées. (Voir *le Génie civil, revue générale des industries françaises et étrangères*, t. III, p. 36, 15 novembre 1882.)

[2] Il faut remonter assez loin dans le passé pour trouver la première application de l'idée qui consiste à fixer sur une surface mobile la trace des variations auxquelles les phénomènes physiques sont soumis. Le marquis D'ONS EN BRAY a décrit, dans les *Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences* (1734), un anémographe qui donnait la vitesse et la direction du vent et qui traçait automatiquement ces résultats sur une feuille enroulée autour d'un cylindre mobile. Un de ces instruments figure dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers. En 1763, CUMMINGS construisait, d'après le système discontinu proposé par CHANGEUX (*Journal de Physique, Chimie et Histoire naturelle*, t. XVI, p. 325), un baromètre traçant les hauteurs du mercure sur un cadran conduit par une horloge. En 1782, MAGELLAN faisait connaître les dispositions d'un *météorographe perpétuel* destiné à inscrire, en un lieu quelconque du globe, toutes les variations atmosphériques. Cet appareil comprenait un barographe, un thermographe, un anémographe, un hygroscope, un pluvioscope et un atmidomètre. En 1794, RUTHERFORD publiait, dans les *Transactions d'Edimbourg*, la description d'un thermométrographe qui traçait sa courbe, au moyen d'une pointe mobile, sur une bande de papier noirci, animée d'un mouvement de translation. Un autre appareil du même genre est décrit dans les *Annales de Gilbert*. En 1806, WATT imaginait son tube indicateur, dont le diagramme fait connaître, par une simple quadrature, le travail de la machine à vapeur. CHAZALON a fait construire, vers 1850, un maréographe propre à enregistrer les variations de régime des cours d'eau aussi bien que les oscillations des marées. BLONDAT a proposé, vers la même époque, un barographe, un thermographe, un hydrographe et un anémographe (voir le *Rapport* au Ministère

naturel est en général soumis à des variations incessantes et les observations directes, quelque fréquentes qu'on les suppose, ne déterminent que des points isolés de la courbe continue qui devrait en être l'expression. On rac-

---

des Travaux publics, par une Commission composée de MM. Bommart, Cavalier et Mangon, *sur l'utilité des instruments destinés à conserver la trace de certains phénomènes physiques et sur quelques instruments de cette espèce, présentés par M. Blondat*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 3e série, 1851, 2e semestre, p. 254). En 1857, Regnard a résolu, au moyen de rouages auxiliaires, la difficulté qui tenait à l'insuffisance de la force développée par certains phénomènes assujettis à effectuer leur propre enregistrement.

L'emploi des appareils enregistreurs a été successivement étendu à un très grand nombre de recherches. En Mécanique, nous citerons : la classe nombreuse des dynamomètres graphiques, qui dérivent plus ou moins directement de la conception de Watt; les appareils, tels que l'odographe de Marey, propres à écrire un grand nombre de mouvements, et en particulier les variations de vitesse d'un train de chemin de fer ou de tout autre véhicule; les divers instruments imaginés par Poncelet et construits par le général Morin; les appareils employés dans les expériences de Balistique, notamment les chronographes de Le Boulangé, de Schultz et de Moisson; le chronographe, le vélocimètre et le projectile inscripteur du colonel Sébert; l'accélérographe proposé par Deprez pour tracer la courbe des vitesses imprimées par la poudre à projectile; le séismographe de Carlile, appareil enregistreur des mouvements relatifs des véhicules en marche et le wagon dynamomètre de la Compagnie des chemins de fer de l'Est.

Parmi les appareils automatiques employés en Météorologie et en Physique, nous indiquerons : le baromètre et l'udomètre inscripteurs de Bréguet; les anémomètres et girouettes à indications graphiques du même inventeur; les baromètres, anémomètres et girouettes à double enregistrement automatique de Gibbons; le baromètre et l'anémomètre d'Eccard; l'enregistreur anémométrique de Jacquemier; les baromètres de Guichard, avec indicateurs électriques; le thermomètre de Richard frères; le baromètre à balance, le thermomètre, le thermographe, le déclinomètre, l'inclinomètre, le bifilaire, l'anémographe, l'électrographe, l'actinomètre et le psychromètre de Salleron; le thermographe de Pictet et Cellerier; l'anémomètre et le pluviomètre d'Hervé Mangon; le baromètre et le manomètre de Bourdon; le baromètre, le thermomètre, le psychromètre, l'hygromètre, l'évaporomètre, l'électromètre de Rédier; l'évaporomètre de Ragona; l'atmographe de l'Observatoire de Montsouris; le limnomètre de Forel; l'appareil de Noel pour les variations de niveau des liquides; le météorographe du P. Secchi; le météorographe de Theorell; le météorographe de van Rysselberghe et Schubart; la série des instruments météorologiques enregistreurs de Hasler et de Hipp; le maréographe de Thomson; les maréographes à cylindre horizontal ou vertical de Collin; les fluviographes du même inventeur, dont un à cadran, avec diagramme polaire, l'autre à trois crayons, inscrivant les variations de niveau dans une écluse et dans les deux biefs qu'elle raccorde; les fluviomètres électriques de Grivolas, de Mocquery, de Schaeffler et de Hipp; l'appareil de Bonneau pour l'enregistrement de la direction et de la vitesse des courants sous-marins à toutes profondeurs; la sonde sous-marine de Rousset; les indicateurs électriques des niveaux d'eau et des pressions de gaz de Guillemard; l'appareil pour enregistrer automatiquement la déclinaison, l'inclinaison et les variations diurnes de Gloesener; l'électromètre de Lippmann; le phonautographe de Scott et Koenig; le phonographe d'Edison;

corde ordinairement ces points par des droites ou par des segments de courbes que les procédés d'interpolation permettent de déterminer. Mais cet artifice est inefficace quand les observations sont faites à longs inter-

---

les appareils de LISSAJOUS, d'HELMHOLTZ, de VILLARI, pour figurer la modalité des ondes sonores; l'harmonigraphe de TISLEY et SPILLER; l'appareil de CORNU pour enregistrer la vitesse de la lumière; l'appareil de M. NAPOLI donnant le diagramme des attractions d'un aimant; les séismographes de PALMIERI, CAVALLERI, DE ROSSI, BERTELLI, CECCHI, GALLI; le panséismographe de GIULIANI; les microséismographes ou tromométrographes de BERTELLI et de ROSSI, pour l'observation des tremblements de terre; le chronographe astronomique de FUESS, etc.

L'emploi des appareils inscripteurs s'est aussi généralisé en Physiologie. On trouve les premières applications de ce genre dans le *Kymographion* de LUDWIG, sorte de manomètre inscripteur pour l'étude de la pression sanguine, dans le *Federkymographion* de FIK (*Untersuch. a. d. Zürcher. physiol. Laborat.*, I, p. 1), dans les appareils de VOLKMANN, de HELMHOLTZ et de VIERORDT [VIERORDT et LUDWIG, *Beiträge zur Lehre von den Athembewegungen* (*Arch. für physiologische Heilkunde*, 1855, t. XIV, p. 258.] pour figurer les phases de la circulation, de la respiration et de l'action musculaire. Les sphygmographes d'OZANAM et de MOSSO (*Von einigen neuen Eigenschaften der Gefässwand*, Leipzig, 1874, et *Movimenti dei vasi sanguigni nell'uomo*, Acad. scienz. di Torino, 1875), le sphygmographe, le cardiographe, le pneumographe, le myographe, le réographe, le dynamographe, le thermographe, le polygraphe de MAREY, l'appareil construit par FRANCK, d'après BUISSON, pour écrire les variations de volume de la main, l'hémodomographe de CHAUVEAU, l'anapmographe de BERGERON, les appareils à explorations successives de DESPREZ et de BLOCH, le périmètre de MEYER pour tracer la courbe des variations du champ visuel suivant les couleurs, les nombreux appareils inscripteurs appliqués par MAREY au passage des ondes liquides, au passage des ondes musculaires, à la rumination, aux différentes allures de l'homme et des animaux, à la locomotion aérienne des oiseaux et des insectes, les appareils de ROSAPELLY pour enregistrer le mouvement des lèvres, d'ARLOING et de CARLET pour inscrire les mouvements de déglutition; le polygraphe électrochimique de RAGOSINE, donnant les courbes de pulsation, de respiration, etc.; telles sont les principales dispositions imaginées pour traduire graphiquement des phénomènes qui, par leur complexité, leur amplitude très restreinte ou leur durée à peine saisissable, semblaient plus que tous autres devoir échapper à ce mode d'investigation. On trouvera la description de ces appareils, l'indication des expériences auxquelles ils se prêtent et l'interprétation des résultats graphiques auxquels ils conduisent dans l'*Annuaire de l'Observatoire de Montsouris* (1878 et 1879); dans les *Annales industrielles* (7 juillet 1878, 30 novembre 1879, 23 octobre et 20 novembre 1881); dans les *Annales des travaux publics* (octobre 1881); dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (décembre 1876, p. 606, et février 1881, p. 225); dans *la Nature* (numéros des 5 et 19 novembre 1881); dans quelques-uns des écrits déjà cités (p. 100) et surtout dans le remarquable Ouvrage du Dr MAREY (*La méthode graphique*, etc.). Voir aussi : *L'électricité et ses applications, exposé sommaire et Notices sur les différentes classes de l'Exposition internationale d'électricité*, p. 106-170, *Instruments de précision*, par MARCEL DEPREZ et SÉBERT. Paris, 1881. — *Bollettino del Vulcanismo italiano* de M. S. DE ROSSI. Roma, 1874-1881. — *La Meteorologia endogena* de M. S. DE ROSSI, Milano, 1879-1882. — *Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879*. Herausgegeben von Dr L. LOEWENHERZ. Berlin, 1880, p. 35-38.

valles ou quand elles portent sur des faits susceptibles de brusques oscillations.

D'autre part, il est souvent utile de comparer des résultats fournis au même moment par divers instruments placés en divers lieux, et il ne suffit pas de multiplier les observateurs pour être assuré que cette condition de synchronisme est exactement remplie. Enfin l'observation directe, et la traduction graphique des résultats numériques qu'elle fournit, portent avec elles les nombreuses chances d'erreur qui tiennent à l'imperfection de nos sens. Les appareils inscripteurs parent à ces inconvénients. Ils rendent l'expérimentation plus facile et plus simple; ils accusent par des tracés continus les vraies courbes figuratives des variations infinies auxquelles les phénomènes sont soumis; ils saisissent et expriment simultanément un grand nombre de faits; ils mesurent les petites fractions de la durée qui échapperaient à l'observation directe et détaillent les phases de tous les mouvements, quelle qu'en soit la lenteur ou la rapidité; ils accumulent les données d'une infinité d'expériences avec une irrécusable fidélité et sous une forme claire et concise, très propre à faciliter la comparaison des faits et la déduction des lois qui les régissent.

Les manifestations statiques des forces sont constatées au moyen d'instruments plus ou moins précis, mais leur immutabilité même exclut toute idée d'enregistrement. Les manifestations dynamiques, au contraire, sont caractérisées par des mouvements dont la transmission, à l'aide d'organes appropriés, permet de conserver les traces écrites des phénomènes.

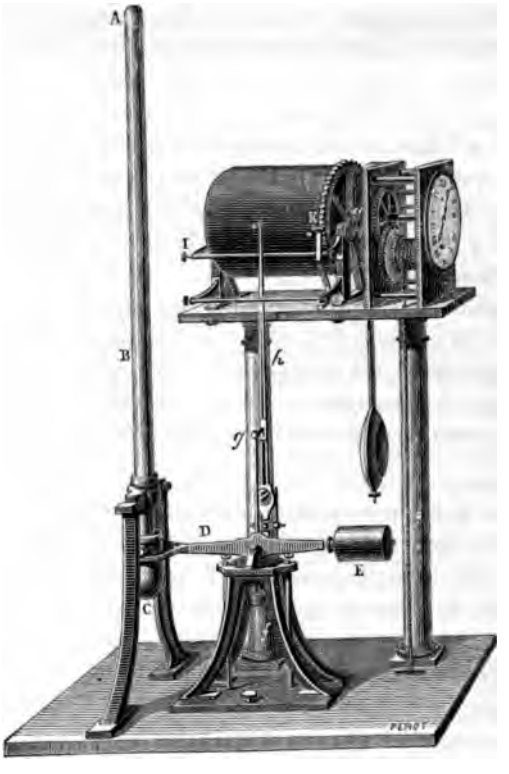
128. Qu'il s'agisse, par exemple, d'enregistrer les variations de niveau d'un fleuve. Un flotteur transmet ces variations à un style guidé verticalement. Une bande de papier, maintenue dans un plan vertical, se déplace en regard du style, de telle sorte que, si celui-ci restait immobile, sa trace sur le papier serait une droite horizontale. Mais, à raison même des variations qu'on se propose d'enregistrer, le style monte ou descend et décrit un diagramme rapporté à deux axes rectangulaires : l'un horizontal, qui est celui des abscisses proportionnelles au temps pris comme variable; l'autre vertical, qui est celui des ordonnées égales ou proportionnelles aux changements de niveau.

L'horizontale parcourue par un point quelconque de la bande mobile est une circonférence décrite du point à l'infini de la verticale qui sert de guide au style. Si l'on prend le centre à distance finie sur cette verticale, les horizontales deviennent des circonférences concentriques, la bande mobile devient un cadran et le style décrit le diagramme en coordonnées polaires des variations de niveau.

Tels sont les principes communs à la plupart des appareils inscripteurs. Toutefois, dans le système rectangulaire, la bande mobile est le plus souvent enroulée autour d'un cylindre qui pivote d'un mouvement uniforme sur son axe et qui présente successivement ses génératrices à la pointe du style.

Dans l'appareil bien connu de Poncelet et Morin, le style est porté par un corps pesant qui tombe verticalement sous l'action de la pesanteur. La

Fig. 90.



parabole tracée sur le cylindre pendant la chute caractérise le mouvement des graves et en détermine la loi.

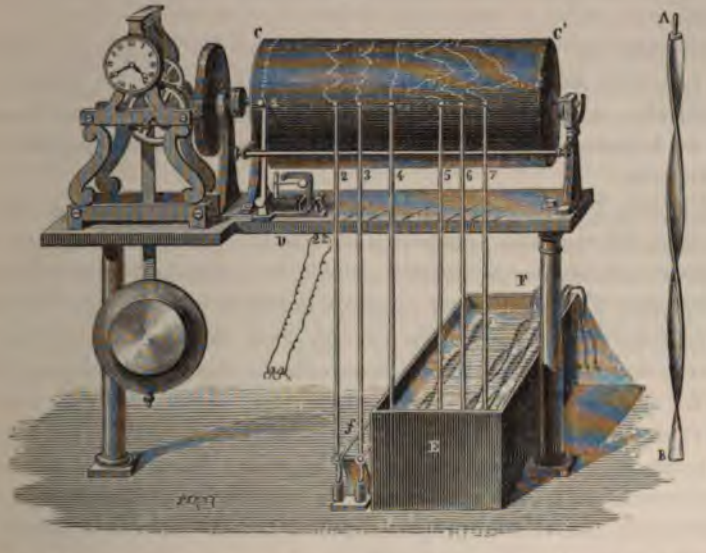
L'indicateur de Watt, qui constitue l'une des plus anciennes et des plus importantes applications de la méthode graphique, est un appareil inscripteur du travail des machines à vapeur. Le style traceur, actionné par un tube manométrique, décrit un diagramme dont les ordonnées sont proportionnelles à la pression de la vapeur dans le cylindre de la machine; le cy-

lindre enregistreur, commandé par le piston, fournit des abscisses proportionnelles aux chemins que ce piston parcourt. L'aire de la courbe est donc proportionnelle au produit de la pression par l'espace parcouru, c'est-à-dire au travail de la machine.

129. Nous donnerons une idée assez complète des appareils inscripteurs appliqués à la Météorologie en décrivant le baromètre-balance et le thermographe adoptés à l'Observatoire de Montsouris.

Le premier de ces instruments est représenté par la *fig.* 90. Un tube barométrique fixe AB plonge dans une cuvette mobile C, suspendue à l'extré-

Fig 91.



mité de l'un des bras D d'une balance et maintenue en équilibre, dans un certain état moyen de la pression atmosphérique, par un contre-poids E placé à l'extrémité du second bras. Suivant que la pression augmente ou diminue, et que par suite une petite quantité de mercure passe de la cuvette dans le tube barométrique ou du tube dans la cuvette, celle-ci monte ou descend et les oscillations du fléau auxquelles ces mouvements donnent lieu sont transmises à l'aiguille *h* qui les inscrit sur le cylindre mobile K. Une pointe d'acier, fixée à l'armature d'un électro-aimant, trace sur l'une des bases du cylindre une ligne de repère circulaire qui devient, après le développement du papier, l'axe des abscisses de la courbe. A chaque contact électrique déterminé par une horloge, la pointe s'écarte un instant de sa

position pour marquer une division du temps sur la ligne de repère. La même horloge agit sur les électro-aimants de tous les cylindres inscripteurs et permet de comparer les résultats fournis aux mêmes moments par un grand nombre d'appareils.

La *fig.* 91 fait connaître la disposition adoptée à Montsouris pour enregistrer simultanément l'état hygrométrique de l'air, la température à la surface du sol et les variations de l'actinomètre [1]. AB représente, à droite de la figure, un tube de Bourdon, sorte de ruban creux à section elliptique, tordu autour de son axe en forme de spire très allongée. Ce tube, rempli d'alcool, est fixé à l'une de ses extrémités; l'autre extrémité, restée libre, porte une aiguille dont les mouvements angulaires accusent les divers états de torsion du tube sous l'action de l'alcool plus ou moins dilaté.

Un tube sec de cette espèce transmet par la tringle *f*, à travers les parois du kiosque, ses variations à l'aiguille n° 2. Un second tube semblable, mais enveloppé de mousseline mouillée, agit sur l'aiguille n° 3. L'ensemble des aiguilles 2 et 3 constitue donc un psychromètre inscripteur.

L'aiguille 5 est fixée à un troisième tube torse, couché dans un bain de glycérine FE et mis en communication, par un conduit capillaire, avec un réservoir tubulaire en métal noirci, placé à la surface du sol. Les indications de l'aiguille 5 sont le résultat complexe des effets produits par l'ensemble de ces tubes exactement remplis d'alcool. Pour défalquer l'action du tube torse et du conduit capillaire, et isoler celle du réservoir couché sur le sol, on fait agir sur l'aiguille 4 un autre tube torse, couché aussi dans le bassin FE et prolongé, comme le précédent, par un conduit capillaire qui n'est pas en communication avec le réservoir. L'aiguille 4 donne ainsi directement les corrections à faire aux indications de l'aiguille 5, et la variation de température du réservoir est proportionnelle à la différence des ordonnées des courbes tracées par ces deux aiguilles.

Les aiguilles 6 et 7 correspondent, l'une à un thermomètre blanc, l'autre à un thermomètre noir, placés tous deux dans le vide sec et mis en communication par des conduits capillaires avec les deux derniers tubes torses du bassin EF. Le degré actinométrique est en rapport avec l'écartement variable des courbes tracées par les deux aiguilles.

L'aiguille 1, commandée par l'électro-aimant, trace la ligne de repère

---

[1] Cet appareil, construit, comme le précédent, par M. Salleron, a fonctionné au Champ de Mars, dans le kiosque de l'Observatoire de Montsouris, pendant toute la durée de l'Exposition de 1878.

commune à toutes les courbes et pointe les heures données par l'horloge commune [1].

---

[1] Nous devons mentionner ici spécialement, à raison des applications graphiques auxquelles il donne lieu, le *thermographe* récemment imaginé par MM. RAOUL PICTET et G. CELLERIER (voir *Méthode générale d'intégration continue d'une fonction numérique quelconque, à propos de quelques théorèmes fournis par l'Analyse mathématique appliquée au calcul des courbes d'un nouveau thermographe*. Genève et Paris, Gauthier-Villars, 1879). Cet appareil présente un cas intéressant d'*anamorphose géométrique*, mécaniquement réalisée au cours même de l'enregistration. Les inventeurs, se fondant sur les théories récentes de la Thermodynamique et sur un grand nombre d'observations, ont établi une relation générale entre la pression P de la vapeur d'un liquide et la température correspondante t. Les variations de P, accusées par le changement de niveau du mercure dans un tube manométrique, sont transmises par un flotteur et par un système de fils, poulies et contre-poids, au crayon chargé de les inscrire sur un papier animé d'un mouvement continu. Si la transmission avait lieu selon les procédés ordinairement adoptés, la courbe tracée donnerait des ordonnées égales ou proportionnelles aux variations de P, et l'intervention du calcul ou des Tables numériques serait indispensable pour déterminer les valeurs correspondantes de t qui sont l'objet final de la recherche. Pour substituer à la courbe des pressions P la courbe directement tracée des températures t, il a suffi de placer entre le flotteur et le crayon, et sur l'axe même du tambour qui obéit aux mouvements du flotteur, une fusée de forme hélicoïdale, d'un pas très petit, sur laquelle s'enroule un second fil, directement attelé au crayon. La spire a pour projection, sur le plan du tambour qui lui est accolé, une courbe de réduction déterminée par la relation $t = \varphi(P)$. Il en résulte que le second fil s'enroule ou se déroule sur la fusée, et que, par suite, le crayon avance ou recule sur le plan du diagramme, de quantités égales pour des variations égales de t. La courbe transformatrice du mouvement est tracée par tangentes au moyen d'un procédé graphique très simple.

CHAPITRE VI.

GÉOMÉTRIE ANAMORPHIQUE ET SOLUTIONS GRAPHIQUES.

LALANNE. *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique*, etc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e sem., t. XI, 1846). — LALANNE, *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables*, etc., Paris, 1878. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zurich, 1875, nos 13-14. — DE LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive*, Paris, 1874, IIIe Partie, nos 1090-1094. — MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, Paris, 1882, p. 458. — LILL, *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*. (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 2e série, t. VI, Paris, 1867, p. 359, et t. VII, 1868, p. 363-367). — *Comptes rendus*, etc., t. LXV, p. 854-857. — *Bellavitis*, IVe Partie de la XIIe *Rivista di giornali*, nos 612, § 2, 3, 6. — V. OTT. *Graphische Darstellung der Funktionen*, Prag, 1865. — SOLIN, *Ueber die graphische Integration*. (*Abhandlungen der K. Böhm Gesellschaft der Wissenschaften*, VI, F. 5. B. Prag, 1872. — STAMM, *Essai sur l'automatique pure*, Milan, 1863. — STAMM, *Sul calcolo grafico e sullo studio dei polinomi interi e razionali della forma* $x^m + ax^{m-1} + \ldots + cx + l$, *coll' ajuto d'un nuovo sistema di coordinate* (*Rendiconti del R. Istituto lombardo*, V. I, Fasc. VI, p. 203-209).

I. — Principes de Géométrie anamorphique.

130. Les tableaux graphiques à courbes d'égal élément (**104**) ne peuvent être dressés avec une exactitude relative que si l'on détermine chaque courbe au moyen d'un assez grand nombre de points. On n'obtient donc que par des constructions longues et minutieuses des figures dont la lecture présente d'ailleurs quelque difficulté, par suite de la confusion possible entre des courbes souvent très rapprochées. Aussi est-il permis de penser que l'usage des tableaux ne se serait jamais beaucoup propagé sans les procédés de transformation et de simplification que nous allons faire connaître.

L'usage d'un tableau graphique ne comporte pas nécessairement que la graduation des coordonnées x et y, situées dans le plan de

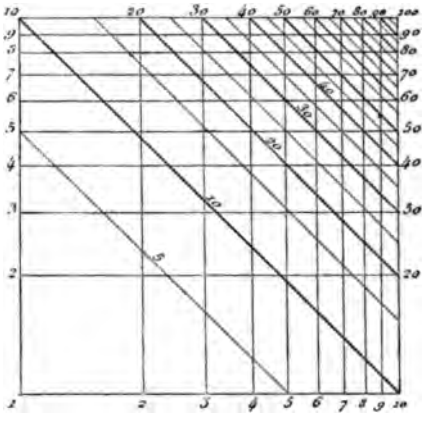
la figure, soit faite suivant une loi déterminée. Considérons, par exemple, la *fig.* 77 (105). Les horizontales et les verticales qui correspondent à la suite des nombres naturels sont équidistantes et les coordonnées sont par conséquent proportionnelles à leurs valeurs numériques. Mais cette proportionnalité n'est pas nécessaire, et l'on peut imaginer que, les notations numériques restant les mêmes, les divisions équidistantes soient remplacées par des divisions espacées suivant une autre loi quelconque. Le point A de l'hyperbole $xy = 10$ qui, dans la figure originaire, était à l'intersection de l'horizontale 5 et de la verticale 2, avait effectivement des coordonnées de la valeur linéaire représentée par ces notations. Le point A_1 de la figure transformée, situé à l'intersection de la nouvelle horizontale 5 et de la nouvelle verticale 2, n'aura plus les mêmes coordonnées linéaires, mais il sera déterminé par d'autres coordonnées ayant les mêmes notations numériques que les premières et pourra, dès lors, être coté 10 comme représentant le point A. En général, l'hyperbole 10, courbe géométrique formée par la suite continue des points A, sera remplacée par une courbe, en quelque sorte arithmétique, cotée 10 et formée par la suite des points A_1. Cette courbe permettra de relever sur la nouvelle figure tous les résultats que les hyperboles fournissaient sur le tableau primitif.

La transformation sera évidemment avantageuse si les nouvelles courbes sont plus faciles à construire et à lire que les précédentes, et surtout si l'on parvient à remplacer les courbes par des lignes droites que deux points suffisent à déterminer. On atteindra ce résultat en faisant varier suivant une loi convenable les valeurs linéaires des coordonnées de la nouvelle figure.

M. Lalanne a été conduit à ces considérations fécondes en cherchant à convertir une table logarithmique à double entrée en un tableau graphique à courbes d'égale cote. La somme des coordonnées de tous les points d'une droite également inclinée sur les axes étant constante, il suffit de porter sur ces axes des longueurs proportionnelles, non plus aux valeurs numériques des coordonnées, mais aux logarithmes de ces valeurs, pour que la droite soit le lieu géométrique de tous les points du plan dont les distances aux axes forment un produit constant. Avec des axes gradués en parties égales, c'est-à-dire suivant la loi

variation numérique qui correspond exactement à la loi de variation linéaire, on avait la suite des hyperboles équilatères de la *fig.* 77. En remplaçant les divisions égales par une graduation logarithmique, les courbes d'égal produit cotées 1, 2, ..., 10, ..., deviennent des droites inclinées à 45° sur les axes. Les coordonnées de l'origine étant nulles, l'origine devra porter comme cote l'unité dont le logarithme est 0. Cette transformation donne naissance à la *fig.* 92 qui n'est autre que la réduction à ses données les plus simples de l'*abaque* précédemment décrit (76).

Fig. 92.



Pour exprimer les mêmes considérations en langage algébrique, revenons au paraboloïde hyperbolique (105)

$$z = xy,$$

et posons

$$x' = \log x, \quad y' = \log y,$$

nous avons

$$\log z = x' + y'.$$

Quand on considère x', y', z comme trois coordonnées variables, cette nouvelle équation représente un cylindre horizontal, dont les lignes de niveau sont des droites parallèles, inclinées à 45° sur les axes.

Ces droites, que la transformation a permis de substituer aux hyperboles de la figure primitive, pourraient, à leur tour, être

remplacées par des circonférences concentriques. Il suffirait, en effet, de poser

$$x' = x''^2, \quad y' = y''^2, \quad \log z = z''^2,$$

pour que l'équation proposée devînt

$$x''^2 + y''^2 = z''^2.$$

La graduation des coordonnées se ferait dans ce cas suivant les racines carrées des logarithmes des nombres.

131. Soit, en généralisant,

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

l'équation d'une surface.

Supposons qu'on ait pu faire subir à cette équation une transformation qui la mette sous la forme

$$(2) \qquad F[\varphi(x), \psi(y), \pi(z)] = 0.$$

Posons

$$(3) \qquad x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y), \quad z' = \pi(z).$$

L'équation (2) devient

$$(4) \qquad F(x', y', z') = 0.$$

Faisons la traduction géométrique de ces transformations en graduant les trois axes suivant les lois exprimées par les relations (3). Il suffit, pour cela, d'attribuer à x, à y et à z des valeurs successives, de calculer les valeurs correspondantes de x', y', z', et de porter à l'échelle ces valeurs sur les axes de coordonnées qu'on a soin de coter d'après les valeurs des variables primitives x, y, z. Les sections planes faites dans la surface représentée par l'équation (4), au moyen de plans parallèles à celui des $x'y'$, donneront comme lignes de niveau des droites, si l'équation (4) est du premier degré en x' et y'; des sections coniques, si cette équation est du second degré, et ainsi de suite. En général, si les deux axes placés dans le plan horizontal ont été gradués suivant les lois indiquées par les relations (3), la nature des courbes de niveau sera déterminée par le degré en x' et y' de l'équation (4). Or ce degré peut être très inférieur au degré de l'équation (1) en x et y.

M. Lalanne a donné à cette méthode de transformation le nom d'*anamorphose géométrique* (¹).

132. Le mode d'anamorphose précédemment appliqué (**130**) à la fonction $z = xy$ s'étend à la classe tout entière des fonctions comprises dans la formule

$$z = \varphi(x).\psi(y),$$

car, en prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$\log z = \log\varphi(x) + \log\psi(y),$$

de sorte qu'en graduant les axes du plan horizontal suivant les lois exprimées respectivement par $x' = \log\varphi(x)$ et par $y' = \log\psi(y)$, on transformera les lignes de niveau de la surface topographique représentée par la fonction proposée en autant de droites parallèles entre elles et inclinées à 45° sur les axes.

A plus forte raison sera-t-il possible d'anamorphoser en une surface réglée celle qui est représentée par l'équation

$$z = \varphi(x) + \psi(y).$$

Il suffira, pour cela, de graduer les axes suivant les lois $x' = \varphi(x)$ et $y' = \psi(y)$.

L'anamorphose est donc facile lorsque, dans l'équation primitive, les variables indépendantes x et y sont séparables, ou lorsqu'elles peuvent le devenir par quelques transformations simples. Mais on ne peut pas donner une règle générale pour effectuer ces transformations.

133. Quand l'équation primitive ne permet pas la séparation des variables moyennant la seule substitution des valeurs $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$ dans cette équation convenablement préparée, la séparation devient quelquefois possible par la substitution des valeurs

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y).$$

(¹) Cette expression est empruntée aux physiciens, qui l'ont employée pour désigner les déformations produites par la réflexion des figures sur des miroirs courbes de formes et de positions déterminées.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad z = \frac{ax^2}{x+y}.$$

On ne peut pas la simplifier en prenant de nouvelles variables qui soient des fonctions distinctes des anciennes, car ces dernières sont réunies dans le dénominateur. Si, cependant, on veut avoir des droites pour les lignes de niveau, on posera

$$x' = ax^2, \quad y' = x + y,$$

et l'on construira sur les formules

$$y' = x + y, \quad z = \frac{x'}{y'}$$

deux tableaux graphiques à double entrée, le premier composé d'obliques à 45°, le second consistant en un faisceau de rayons qui a son centre à l'origine. Le premier tableau fait connaître l'ordonnée auxiliaire y'; le second donne ensuite l'inconnue z'.

On peut éviter la construction du second tableau en mettant l'équation (1) sous la forme

$$y - ax^2 \cdot \frac{1}{z} + x = 0,$$

ou, en posant $z' = \frac{1}{z}$, sous la forme

$$y - (ax^2)z' + x = 0.$$

On a ainsi une équation du premier degré entre y et z'.

134. Soit encore la relation

$$z = \frac{a(x^3+y^3)}{x^2+y^2}.$$

Posons

$$x^2 + y^2 = z', \quad x^3 + y^3 = z''$$

il vient

$$z = \frac{az''}{z'}.$$

Trois tables graphiques à double entrée sont nécessaires, dans ce cas, pour trouver la valeur numérique de z correspondant à des valeurs données de x et de y. Mais ces tables seront toutes

composées de lignes droites, si l'on a soin de graduer les axes des coordonnées en posant, pour la première table,

$$x' = x^2, \quad y' = y^2;$$

pour la deuxième,

$$x'' = x^3, \quad y'' = y^3,$$

et pour la troisième,

$$z''' = z', \quad y''' = az''.$$

Il est facile de comprendre qu'en soumettant la fonction primitive à des transformations successives de ce genre, on arrivera toujours à calculer les valeurs numériques d'une fonction à deux variables, au moyen d'une suite de tableaux graphiques à double entrée, qui ne renfermeront que des lignes droites. Mais la méthode perdrait ses avantages pratiques si l'on avait à opérer avec un trop grand nombre de tableaux.

135. Rien, dans ce qui précède, n'indique que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, suivant lesquelles on gradue les axes des coordonnées, doivent aller toujours en croissant ou toujours en décroissant. Ces fonctions peuvent avoir des *maxima* ou des *minima*, auquel cas les valeurs linéaires de la graduation des axes, après avoir été en croissant dans un certain sens, iront en décroissant, et devront être comptées en sens contraire.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde représenté par l'équation

$$yz + x^2 - 20x + 104 = 0.$$

Les courbes horizontales sont des paraboles.

Mais, si nous posons

$$x' = x^2 - 20x + 104,$$

nous aurons

$$yz + x' = 0,$$

et les lignes de niveau seront des droites.

A la valeur 4 de x' correspond, pour x, une grandeur minimum égale à 10. La cote 10 sera, par conséquent, au point dont l'abscisse est 4, et les cotes 11, 12, 13, ..., 9, 8, 7, ... seront sur la partie de l'axe qui s'étend au delà de ce point. Les valeurs de x sont imaginaires pour les abscisses inférieures à 4, et, par suite,

les droites transformées des paraboles sont parasites au delà de la parallèle à l'axe des ordonnées dont l'abscisse est 4.

136. Après avoir obtenu la transformation d'une figure au moyen d'une graduation particulière des coordonnées, on peut en déduire une infinité d'autres figures analogues, sans recourir à de nouvelles transformations des équations, par de simples projections orthogonales ou polaires, sur des plans, sur des surfaces développables, ou même sur des surfaces quelconques.

L'anamorphose géométrique par voie de graduation des coordonnées peut, d'ailleurs, être appliquée à un système quelconque de coordonnées.

Par exemple, pour anamorphoser en une spirale d'Archimède $\rho' = \omega'$ une spirale hyperbolique représentée par l'équation en coordonnées polaires $\rho\omega = a^2$, il suffira de poser

$$\rho' = \log\rho, \quad \omega' = -\log\omega$$

et de graduer respectivement suivant les lois représentées par ces deux équations le rayon vecteur et la circonférence sur laquelle on mesure les écartements angulaires.

II. — Résolution graphique des équations [1]. Méthode de Lill.

137. Soit

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

une équation de degré m, dont les coefficients A, B, C, ..., M,

---

[1] Euclide est considéré, à juste titre, comme représentant la somme des connaissances géométriques acquises jusqu'à son temps. Aussi, laissant de côté les recherches relatives aux époques antérieures, nous bornerons-nous à rappeler que les fondements de l'Analyse des équations du second degré sont contenus, sous forme géométrique, dans les quatrième et cinquième propositions du Livre II des *Éléments*, et que la sixième proposition du même Livre présente l'importante construction qui conduit, dans la résolution des équations quadratiques, à ajouter aux deux membres le carré du demi-coefficient de l'inconnue. Il faut citer aussi les propositions vingt-septième et vingt-huitième du Livre VI, et les *Données* LVIII, LIX, LXXXIV, LXXXV, dans lesquelles on retrouve au complet la résolution par voie géométrique des équations du second degré avec des applications qui, de nos jours encore, n'ont rien perdu de leur intérêt. Euclide est même allé beaucoup plus loin,

N sont des nombres donnés. Soumettons-la à une série de divi-

---

car, dans les *Données* LXXXVI et LXXXVII, il enseigne à résoudre géométriquement les équations du quatrième degré de la forme

$$x^4 + q x^2 - n = 0.$$

Des recherches récentes, soumises à l'épreuve de la plus sévère critique, ont mis hors de doute que les Grecs savaient construire les équations du troisième degré. Les auteurs de ces recherches ont trouvé de précieux éléments d'instruction dans le développement historique de quelques problèmes célèbres, tels que ceux de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, et dans les autres nombreux documents que l'école grecque nous a laissés pour l'histoire de la construction graphique des problèmes du troisième degré. Il suffira de citer les diverses constructions de cet ordre qui figurent dans les commentaires d'Eutocius sur le *Traité de la sphère et du cylindre*, d'Archimède, la doctrine des maxima et des minima d'Apollonius et les questions pour la solution desquelles Diophante eut recours à des considérations géométriques.

Dans les règles données par Brahmegupta, pour la construction du triangle rectangle en nombres rationnels et pour la construction des quadrangles, on trouve tous les éléments nécessaires pour résoudre les équations indéterminées du second degré et l'équation

$$x^2 + y^2 = A$$

en termes rationnels. Nous devons signaler aussi les deux constructions graphiques de l'équation indéterminée

$$ax + by + c = xy,$$

proposées par Bhascara, et les problèmes du même géomètre consistant à trouver, en nombres rationnels, les côtés du triangle rectangle dont l'aire est exprimée par le même nombre que l'hypoténuse, ou dont l'aire est numériquement égale au produit des trois côtés.

On trouve de très importantes recherches sur la construction graphique des équations dans les écrits mathématiques des Arabes. Mohammed ben Mousa s'est expressément occupé des équations quadratiques; Aboul Wefa a laissé tout un Recueil de constructions géométriques. Parmi les nombreux écrits des autres géomètres arabes, nous nous bornerons à citer ceux d'Alkarkhi et d'Omar Alkhahami. La question qui nous occupe y est traitée avec beaucoup de détails. Nous devons signaler aussi, dans ce trop rapide aperçu, le procédé connu sous le nom de *plateaux de balance*.

Léonard de Pise eut le mérite de faire connaître à l'Occident les travaux des Arabes, auxquels il ajouta le fruit de ses propres recherches. Luca Pacioli écrivit aussi sur la construction des équations, mais sans originalité et en imitateur fidèle de Mohammed ben Mousa. Tartaglia et Cardano donnèrent ensuite les très intéressantes constructions géométriques qui se trouvent dans leurs Œuvres.

Viète, Descartes et plus tard Newton firent entrer la construction graphique des équations dans une phase nouvelle, plus féconde en ressources et en applications. Il serait malaisé d'exposer en peu de lignes toute la suite de ces développements nouveaux. Nous préférons renvoyer le lecteur aux deux publications suivantes, dans lesquelles nous avons coordonné tous les renseignements qu'il nous a été donné de recueillir : *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*. Modena, 1878. — *Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*. Modena, 1880.

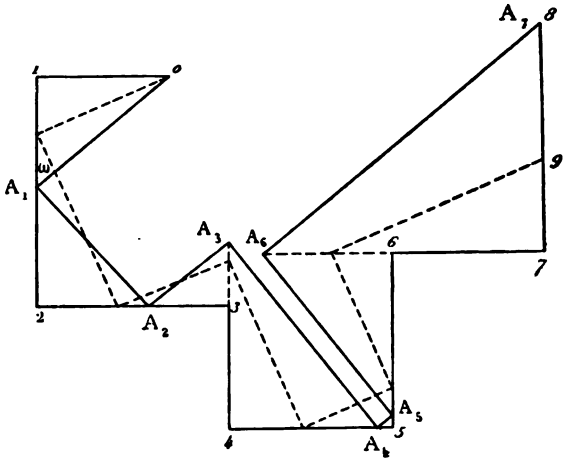
sions successives par x, et posons

$$
(1)\quad
\left\{
\begin{array}{lll}
-(Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\cdots+Lx)=y_1 & =\frac{1}{x}N & +M,\\
-(Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+Cx^{m-4}+\cdots+Kx)=y_2 & =\frac{1}{x}y_1 & +L,\\
-(Ax^{m-3}+Bx^{m-4}+Cx^{m-5}+\cdots+Ix)=y_3 & =\frac{1}{x}y_2 & +K,\\
\ldots\ldots\ldots

dont la tangente trigonométrique est égale à $-\frac{1}{x}$ (x étant une des racines de l'équation), on pourrait former le second contour polygonal $oA_1A_2A_3\ldots A_7$ qui délimite, dans l'intérieur du premier, les triangles rectangles $o1A_1$, A_12A_2, A_23A_3, ..., dont nous avons parlé plus haut. Ce nouveau contour aboutirait exactement au point 8, extrémité du premier, et la longueur $1A_1$ ($o1$ étant pris pour unité) serait une racine de l'équation proposée.

La résolution graphique de cette équation se réduit donc à chercher, sur le côté 12 du contour primitif, un point A_1, tel que le nouveau contour rectangulaire, dont le premier côté est oA_1, et dont les sommets consécutifs s'appuient consécutivement sur les

Fig. 93.



autres côtés 23, 34, ..., du contour $o123\ldots 8$, ait pour dernier côté une droite passant par l'extrémité 8. Le nombre des racines réelles de l'équation proposée est égal au nombre de points, satisfaisant à cette condition, qu'on peut trouver sur le côté 12 ou sur ses prolongements.

138. Lill a imaginé un instrument très simple, qui permet de déterminer ces racines avec rapidité. Sur un disque circulaire en bois, parfaitement dressé, sont tracés deux systèmes rectangulaires de cordes parallèles, distantes l'une de l'autre d'un millimètre. Le

disque est gradué dans le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre. Il tourne autour de son centre, sur une tablette fixe, munie d'un vernier, et au-dessous d'un autre disque en verre transparent, usé à l'émeri, sur lequel on peut tracer des traits au crayon.

Pour résoudre une équation donnée, on commence par établir la coïncidence entre le zéro du limbe mobile et celui du vernier. Le rayon oY, qui marque la direction de l'une des deux séries de cordes parallèles, passe alors par le zéro commun, et le rayon oX passe par le point du limbe qui correspond à 270°. On marque, sur le verre, de la manière que nous venons d'indiquer, les points 0, 1, 2, 3, ... 8, et l'on trace au crayon le contour 123 ... 8. Le quadrillé du disque inférieur permet d'effectuer très rapidement cette opération. On fait ensuite tourner le cercle mobile gradué, jusqu'à ce qu'il parvienne à une position telle qu'un contour polygonal rectangulaire, appuyant consécutivement ses sommets sur les droites 01, 12, 23, ... vienne aboutir au point 8. Tout contour de ce genre fournit une longueur oA_1 qui représente une racine de l'équation. Les tâtonnements que cette recherche comporte sont rendus faciles et prompts par le quadrillé du cercle mobile. La graduation du cercle, dont le vernier permet d'évaluer un tiers de degré, sert à déterminer les racines avec une plus grande exactitude. Chacune des longueurs, telles que oA_1, n'est autre, en effet, que la tangente trigonométrique de l'angle dont il a fallu faire tourner le cercle mobile pour amener l'axe oX de sa direction primitive 01 à la nouvelle position oA_1 qu'il occupe lorsque le contour rectangulaire $oA_1A_2 \ldots A_7$ passe par le point 8. On pourra donc, au moyen de tables numériques, qui pourront être elles-mêmes transformées en tableaux graphiques, obtenir la longueur de ces tangentes avec plus de précision que n'en comporte la simple lecture du quadrillé.

Le sens dans lequel on doit tracer les côtés du contour primitif dépend du signe du coefficient que chacun de ces côtés représente. On peut suivre, à cet égard, la règle suivante : Supposons qu'on ait adopté, pour représenter les deux premiers coefficients, les directions des quatre côtés d'un carré 0123. Les côtés correspondant aux coefficients qui occupent dans l'équation les rangs $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, $4n$, suivront respectivement les direc-

tions 01, 12, 23, 30, si ces coefficients sont positifs, et les directions opposées s'ils sont négatifs. Si un coefficient est nul, le rang des termes et, par suite, le sens des côtés ne subissent aucune altération.

Il résulte de ces conventions, qui n'ont rien d'arbitraire, qu'à tout contour ainsi construit ne correspond qu'une seule équation, et réciproquement. On peut donc dire qu'un tel contour rectangulaire représente graphiquement une équation déterminée.

Revenons à la recherche de la valeur $1A_1$. Supposons qu'au lieu d'avoir donné à ce côté la longueur convenable pour que le second contour se ferme exactement au point 8, on l'ait pris d'une longueur telle que le dernier côté du second contour passe par un certain point 9 du côté 78. La distance 89 représentera l'erreur finale Q à laquelle conduit l'hypothèse. Proposons-nous de chercher l'expression analytique de cette erreur.

Les triangles rectangles semblables $01A_1$, $A_1 2A_2$, $A_2 3A_3$, .. donnent les séries de rapports égaux

$$\frac{01}{1A_1} = \frac{A_1 2}{2A_2} = \frac{A_2 3}{3A_3} = \cdots = \frac{A_6 7}{78}.$$

Faisant $1A_1 = X$ et représentant les longueurs 01, 12, 23, .. respectivement par A, B, C, ..., on a

$$\frac{A}{X} = \frac{B - X}{B\left(\frac{X}{A}\right) - A\left(\frac{X}{A}\right)^2}$$

$$\frac{C - B\left(\frac{X}{A}\right) + A\left(\frac{X}{A}\right)^2}{C\left(\frac{X}{A}\right) - B\left(\frac{X}{A}\right)^2 + A\left(\frac{X}{A}\right)^3} = \cdots = \frac{A_6 7}{78}$$

$$= \frac{M - L\left(\frac{X}{A}\right) + \cdots + C\left(\frac{X}{A}\right)^{m-3} - B\left(\frac{X}{A}\right)^{m-2} + A\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1}}{M\left(\frac{X}{A}\right) - L\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \cdots + C\left(\frac{X}{A}\right)^{m-2} - B\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1} + A\left(\frac{X}{A}\right)^m};$$

d'où l'on déduit

$$Q = N - 67 = N - M\left(\frac{X}{A}\right) + L\left(\frac{X}{A}\right)^2 - \cdots + B\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1} - A\left(\frac{X}{A}\right)^m.$$

Si l'on fait $\left(-\frac{X}{A}\right) = x_1$, on aura finalement

$$Q = A.x_1^m + B.x_1^{m-1} + C.x_1^{m-2} + \ldots + Lx_1^2 + M.x_1 + N.$$

La valeur de Q est donc précisément celle que prend le polynôme donné quand on y remplace par x la valeur $-\frac{X}{A}$ ou $-\frac{1A_1}{A}$. Si donc $Q = 0$, c'est-à-dire si le second contour vient aboutir au point final 8 du premier, la quantité $-\frac{1A_1}{A}$ sera une racine de l'équation proposée.

L'exactitude de la précédente construction se trouve ainsi démontrée; on reconnaît d'ailleurs que la racine obtenue est négative quand la longueur trouvée $1A_1$ tombe sur la partie positive de 12, et *vice versa*.

Quand on est arrivé à connaître r racines de l'équation proposée et qu'on ne peut plus obtenir, par la construction, aucun résultat nouveau, on en doit conclure que les $m - r$ autres racines sont imaginaires. On peut appliquer à la détermination de celles-ci une méthode analogue à celle qui vient d'être indiquée; toutefois, les contours rectangulaires auxquels on aura recours n'appuieront plus leurs sommets sur les côtés du contour primitif, comme il arrivait dans le cas des racines réelles. Nous n'insistons pas davantage, et nous concluons en disant que cette méthode graphique peut être très utile pour trouver promptement une première approximation des valeurs des racines d'une équation numérique d'un degré quelconque.

139. Si l'équation est du second degré, la même méthode fournit la solution suivante qui, dans ce cas, est rigoureuse. Soit l'équation

$$A.x^2 + B.x + C = 0.$$

On construit (*fig.* 94) le contour 0123, dont les côtés 01, 12, 23 expriment les coefficients A, B, C, et sur 03 comme diamètre on décrit une demi-circonférence. Soient X_1, X_2 les deux points où cette demi-circonférence coupe le côté 12. Les longueurs $1X_1$, $1X_2$ sont les deux racines de l'équation, 01 étant pris pour unité.

III. — Détermination graphique des racines d'une équation. Méthode de Bellavitis.

140. Soit à déterminer les racines de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

y, m et h (*fig.* 95) sont trois axes parallèles. Portons sur y, à partir d'un point quelconque O pris pour origine, les segments OD, DC, CB, BA, respectivement équipollents (3) à d, c, b, a. Élevons aux points O et A de y les perpendiculaires à cet axe jusqu'à leur rencontre avec h aux points H et A_1. Joignons A_1B qui coupe m au point K. Si les droites h et m sont respectivement aux distances 1 et x de y, le point K sera à la distance $ax + b$ de la perpendiculaire abaissée du point C sur h. Abaissons du point K

Fig. 94.

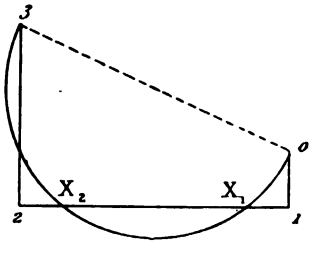
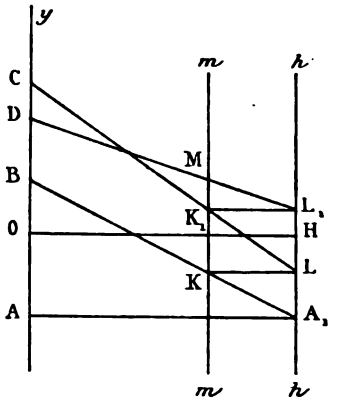


Fig. 95.



la perpendiculaire KL sur h, et joignons LC. Cette droite coupe m en un second point K_1, situé à la distance $(ax + b)x + c$ de la perpendiculaire abaissée du point D sur h. Projetons K_1 sur h en L_1, et menons L_1D qui coupe m au point M. En déterminant autant de points M qu'on voudra, nous obtiendrons une courbe parabolique, et tout point X d'intersection de cette courbe et de la droite OH fournira une racine

$$x = OX : OH.$$

Ce procédé très simple peut être étendu à une courbe de degré quelconque.

En limitant la construction à l'intervalle compris entre les droites y et h, on obtiendra seulement les racines positives plus petites que l'unité.

Pour construire les racines négatives, on changera x en $-x$. Quant aux racines comprises entre 1 et $+\infty$, entre 0 et -1, entre -1 et $-\infty$, on les obtiendra facilement par les transformées de l'équation proposée.

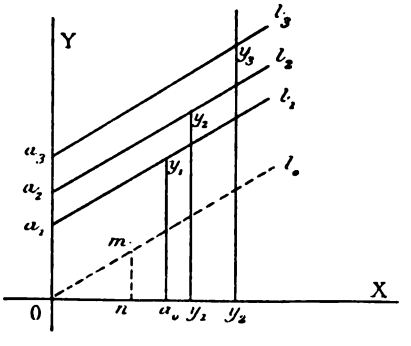
IV. — Sommation graphique des séries.

141. Soit, en général, à sommer graphiquement la série

$$(1) \qquad a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + \ldots + a_{n-1} v + a_n.$$

Posons $v = \frac{m}{n}$, et construisons d'abord (*fig.* 96) la droite l_0 déterminée par ce rapport. Portons sur OX, à partir de l'origine O,

Fig. 96.



la longueur a_0, sur OY, à partir de la même origine, les longueurs a_1, a_2, a_3, ... Par les extrémités des segments a_1, a_2, a_3, ..., menons les parallèles l_1, l_2, l_3, ... à l_0. A l'extrémité de l'abscisse n, élevons l'ordonnée y_1 limitée à la droite l_1; à l'extrémité d'une abscisse égale à y_1, élevons l'ordonnée y_2 limitée à la droite l_2; à l'extrémité d'une abscisse égale à y_2, l'ordonnée y_3 limitée à l_3, et ainsi de suite. Les parallèles l_1, l_2, l_3, ..., l_{n-1}, l_n donnent respec-

tivement les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 v + a_1, \\
y_2 &= y_1 v + a_2, \\
y_3 &= y_2 v + a_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{n-1} &= y_{n-2} v + a_{n-1}, \\
y_n &= y_{n-1} v + a_n.
\end{aligned}$$

Multipliant ces équations respectivement par

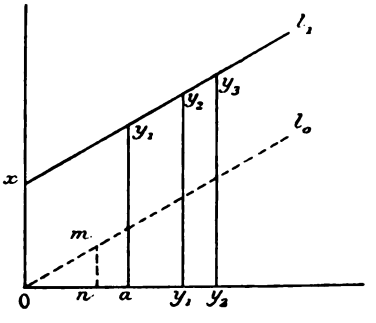
$$v^{n-1},\quad v^{n-2},\quad v^{n-3},\quad \ldots\quad v^1,\quad v^0,$$

et remplaçant les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots$ par leurs valeurs duites des équations précédentes, il vient

$$\begin{aligned}
y_1 v^{n-1} &= a_0 v^n + a_1 v^{n-1}, \\
y_2 v^{n-2} &= a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2}, \\
y_3 v^{n-3} &= a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + a_3 v^{n-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n-1} v &= a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + \ldots + a_{n-1} v, \\
y_n &= a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} + \ldots + a_{n-1} v + a_n,
\end{aligned}$$

d'où il suit que l'ordonnée y_n correspondant à la parallèle l_n

Fig. 97.



présente la somme des $n + 1$ termes de la série proposée.

142. Appliquons cette méthode générale à la sommati série géométrique.

$$y_n = a + av + av^2 + av^3 + \ldots + av^{n-1} + av^n,$$

lont le rapport constant est v. On arrivera au résultat cherché en aisant dans la série (1)

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n = a,$$

et en posant $\frac{m}{n} = \frac{v}{1}$. Toutes les parallèles de la construction précédente coïncideront dès lors avec l_1, comme l'indique la *fig.* 97, et l'on aura

$$\begin{array}{ll}
\text{pour } x = 0, & y_0 = a, \\
\text{»} \quad x = a, & y_1 = a + av, \\
\text{»} \quad x = y_1, & y_2 = a + av + av^2, \\
\text{»} \quad x = y_2, & y_3 = a + av + av^2 + av^3, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\text{»} \quad x = y_{n-1}, & y_n = a + av + av^2 + \ldots + av^{n-1} + av^n.
\end{array}$$

S'il s'agissait d'une progression arithmétique, dont les termes consécutifs diffèrent entre eux d'une quantité constante, la suite de ces termes serait exprimée graphiquement par les ordonnées d'une droite. Pour représenter graphiquement, par exemple, le $p^{\text{ième}}$ terme de cette progression, il suffirait de porter en abscisse, à partir du pied de la première ordonnée, un segment égal à $p - 1$ unités de longueur, et d'élever à l'extrémité de ce segment une nouvelle ordonnée jusqu'à la rencontre de la droite l.

APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE VI.

A. — APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE ANAMORPHIQUE.

I. — Abaques pour les problèmes sur l'écoulement des liquides.

143. Considérons la relation

$$RI = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) u^2. \tag{1}$$

dans laquelle on représente par R le rayon moyen d'un canal à pente et à section constantes, c'est-à-dire le rapport de la section mouillée au périmètre mouillé, par I la pente, par u la vitesse moyenne du liquide dans une section quelconque, par α et β des constantes déduites de l'expérience.

On peut avoir à déterminer l'une quelconque des trois quantités R, I, u en fonction des deux autres. Le rayon et la vitesse étant considérés comme variables, si l'on attribue au paramètre R une série de valeurs constantes successives, on arrive à déterminer un tableau de paraboles dont chacune a pour cote la valeur correspondante de R.

En prenant comme coordonnées, non plus les valeurs de I et de u, mais les logarithmes de ces variables, M. Collignon [1] a dressé un Tableau gra-

[1] *Cours de Mécanique appliquée aux constructions;* IIe Partie : *Hydraulique.* Paris, 1880, p. 298 et *Pl. II.* D'autres tableaux graphiques pour l'étude du mouvement de l'eau dans les canaux découverts ont été dressés par M. Ed. Pellis (*Bulletin de la Société vaudoise des ingénieurs et architectes*, juin 1878); par MM. Ganguillet et Kutter (*Journal de la Société des ingénieurs et architectes de Vienne*, 1869); par M. Hering, dans les *Transactions* de la Société américaine des ingénieurs civils, janvier 1879.

Cousinery avait déjà publié, en 1845, dans le t. II de son *Recueil de Tables à l'usage des ingénieurs*, un Tableau graphique à coordonnées graduées, dressé d'après la formule de Prony, pour la solution des problèmes relatifs au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite. Ce tableau et un autre du même Recueil, relatif au produit de deux nombres, dont l'un doit être élevé au carré, constituent deux applications déja anciennes de Géométrie anamorphique, suivant la méthode imaginée

phique dans lequel les paraboles sont remplacées par des droites parallèles. L'angle des axes de coordonnées et les échelles de graduation ont été choisis de telle sorte que les droites correspondant aux pentes, aux vitesses et aux rayons sont respectivement verticales, obliques et horizontales. Les coefficients α et β variant d'ailleurs avec la nature des parois, l'axe vertical du Tableau présente quatre échelles de graduation distinctes, correspondant à quatre couples de valeurs de ces coefficients.

144. La formule (1) représentera la loi d'écoulement dans les tuyaux de conduite, si l'on désigne par R le rayon du tuyau, par α et β les coefficients particuliers à ce cas. On aura donc encore un Tableau de paraboles, transformable en un Tableau de droites, disposé comme il vient d'être dit. Dans les canaux découverts, la connaissance du rayon moyen R ne suffit pas pour déterminer la section et par conséquent le débit. Dans le cas des tuyaux,

---

par M. Lalanne. Cette méthode était, en effet, connue par l'*abaque* et par le rapport de Cauchy à l'Académie des Sciences (11 septembre 1843). Coriolis signalait dans le même Ouvrage (p. 259) l'analogie qui existe entre l'anamorphose rectiligne des courbes et le problème de Mercator et de Wright, consistant à allonger les degrés de latitude de façon à remplacer, sur les cartes plates, la loxodromie par un tracé rectiligne. Cette analogie est incontestable, dit M. Lalanne (*Méthodes graphiques*, etc., p. 406), mais a-t-elle joué quelque rôle dans l'invention de l'anamorphose? Les savants chargés d'en rendre compte à l'Académie ne l'ont pas pensé. Dans une Lettre du 15 août 1843, Lamé, résumant l'opinion de Cauchy, disait : « On peut contester à M. Lalanne la priorité d'invention relativement à l'emploi du tracé graphique en général, mais l'idée des coupes linéaires est neuve, ingénieuse et lui appartient exclusivement ». En dehors des cas d'anamorphose qui sont traités dans les Mémoires déjà cités de l'inventeur, nous signalerons, parmi les applications intéressantes de la méthode, l'abaque d'Alcan pour la transformation des anciens titrages de fils en titrages métriques (*Traité des matières textiles*); les abaques de M. Louvel pour le calcul de la résistance à la rupture des fers à double T et pour le calcul des intérêts composés à divers taux (*Portefeuille des conducteurs des Ponts et Chaussées*, 4e série, nos 6 et 7); quelques-uns des *Tableaux* de M. Eug. Pereire *sur les questions d'intérêt et d'assurances;* l'abaque logarithmique proposé par le capitaine Goulier pour la correction des erreurs commises dans la mesure approximative des distances au moyen d'un instrument spécial (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 18, 1868); les abaques de M. A. de Kapteyn, pour les calculs des soupapes de sûreté, des machines à vapeur, des épaisseurs de tôles pour chaudières (*Revue universelle des mines, de la métallurgie*, etc., t. XL, 1876, 2e sem.); les *Tableaux graphiques* de M. Lévy-Lambert pour les calculs des ressorts, traduction des formules de M. Phillips en abaques de lignes droites (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1880, 2e sem., p. 59); enfin les abaques de MM. Ricour, Gariel, Chery, cités dans le texte.

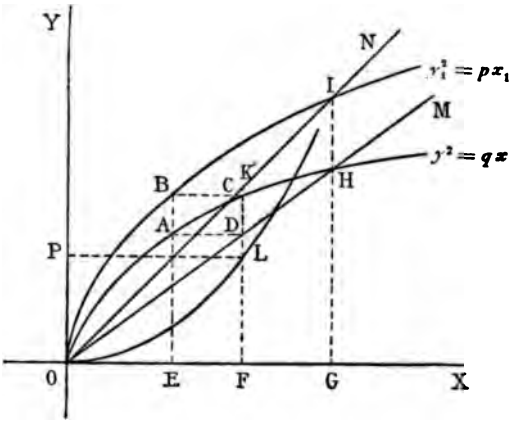
Les publications faites à l'étranger sur le même sujet par MM. Hermann (*Das graphische Einmaleins*, etc. Braunschweig, 1875), Vogler (*Sechs graphische Tafeln zum Schnellrechnen und zum Schnellquotiren*, etc., Berlin, 1877), Kapteyn (*loc. cit.*) et Helmert (*Zeitschr. für Vermessungswesen*, Stuttgart, 1873, Heft I) ont provoqué de la part de M. Lalanne des réclamations de priorité (*Méthodes graphiques*, etc., p. 398).

au contraire, le débit est donné par la relation $Q = \pi R^2 u$; et comme le rayon, la pente et la vitesse sont déterminés en chaque point du plan, la dépense Q l'est aussi. On pourra donc tracer sur le même tableau les courbes d'égal débit. Ces courbes sont sensiblement droites dans le tableau anamorphosé que M. Collignon a établi [1] pour le cas de l'écoulement dans des tuyaux à parois lisses. Ce tableau permet de résoudre les six catégories de questions qui consistent à déterminer deux des quatre quantités R, I, u et Q en fonction des deux autres.

II. — Déformation suivant un seul axe. Abaque des soupapes de sûreté.

145. On opère quelquefois l'anamorphose d'une figure plane en la déformant dans la direction d'un seul des axes de coordonnées [2]. On peut, par exemple, se donner comme condition que tout point D (*fig.* 98) d'une

Fig. 98.



droite OM, obtenue par la transformation d'une courbe OAH, ait même ordonnée que le point A qui lui correspond sur cette courbe.

Considérons l'équation

$$y^2 = qx, \tag{1}$$

dans laquelle q prend successivement des valeurs constantes différentes; à chacune de ces valeurs correspond une parabole, et la suite des paraboles,

---

(1) *Cours de Mécanique*, etc., *Pl. I.*

(2) Voir Alb. de Kapteyn, *Note sur une méthode de graduation représentant des courbes par des lignes droites* (*Revue universelle des mines, de la métallurgie, des travaux publics*, etc. Liège, 1876, 2e sem., t. XL).

c'est-à-dire la suite des courbes de niveau fournies par la surface (1), constitue un Tableau graphique qu'il s'agit de transformer.

Soient

$$y^2 = qx, \quad y_1^2 = px_1$$

deux de ces paraboles ayant même axe et même sommet à l'origine des coordonnées; soient A, D deux points correspondants situés respectivement sur la première courbe et sur la droite cotée OM, qui représente cette courbe après la transformation et qui la coupe une seconde fois au point H. L'ordonnée du point H prolongée rencontre la seconde parabole, $y_1^2 = px_1$, en un point I.

Nous nous proposons de démontrer que cette seconde courbe est représentée, après l'anamorphose, par la droite OI.

Soient B le point de la seconde courbe ayant même ordonnée que le point A de la première, C et K les points d'intersection de la droite OI, respectivement avec l'horizontale du point B et avec la verticale du point D. L'abscisse des points H et I étant représentée par a, nous avons

$$\overline{GH}^2 = y^2 = aq \quad \text{et} \quad \overline{GI}^2 = y_1^2 = ap;$$

posant $OE = \frac{a}{n}$, il vient

$$\overline{AE}^2 = \frac{aq}{n} \quad \text{et} \quad \overline{BE}^2 = \frac{ap}{n}.$$

On a donc

$$\frac{GH}{GI} = \frac{AE}{BE},$$

mais, d'après la construction,

$$\frac{GH}{GI} = \frac{FD}{FK}$$

et, par suite,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{FD}{FK}.$$

AE étant d'ailleurs égal à FD, il s'ensuit que BE est égal à FK et que les points C et K coïncident. En d'autres termes, le point C de ON a la même graduation que le point D de OM et le faisceau de paraboles considéré est anamorphosé en un faisceau de rayons qui a son centre à l'origine.

146. La construction qui précède peut être simplifiée par l'emploi d'une courbe auxiliaire.

Marquons sur l'ordonnée de graduation FD le point L, tel que FL = OE.

Soient x et y les coordonnées du point A de la parabole considérée OH, x_1 et y_1 les coordonnées du point D de la droite correspondante OM, c le coefficient angulaire de cette droite, X et Y les coordonnées du point L. On a

$$x = Y, \quad x_1 = X, \quad y_1 = y$$

et, par suite,

$$(1) \qquad Y = \frac{y^2}{q},$$

$$(2) \qquad X = \frac{y}{c};$$

d'où, en éliminant y,

$$X^2 = \frac{q}{c^2} Y.$$

Le lieu géométrique des points L est donc une seconde parabole qui a pour sommet l'origine et pour grand axe celui des Y. Cette courbe étant construite, on déterminera l'ordonnée de graduation FD, correspondant à une ordonnée primitive quelconque EA, en menant par le point P, situé sur l'axe des Y, à la distance OP = OE, une horizontale qui coupera la parabole auxiliaire en un point L de l'ordonnée cherchée.

147. Considérons, à titre d'exemple pratique, la formule

$$d = 2,6 \sqrt{\frac{w}{p + 0,621}},$$

qui sert à déterminer en centimètres le diamètre d des soupapes de sûreté en fonction de la surface de chauffe w, exprimée en mètres carrés, et de la pression effective p dans la chaudière.

En attribuant au paramètre p des valeurs constantes successives, on obtient un tableau de paraboles analogue à celui que nous venons de considérer et l'une des deux constructions précédentes donne l'anamorphose en un faisceau de rayons ayant son centre à l'origine.

III. — Abaques pour le calcul des poutres.

148. Soit la relation

$$(1) \qquad \frac{RI}{u} = \frac{pz^2}{8},$$

dans laquelle R est la charge permanente par unité de surface qu'une pièce peut supporter, I le moment d'inertie d'une section perpendiculaire à l'axe

ı pièce, pris par rapport à une droite coupant cet axe à angle droit, distance de l'axe à la fibre la plus éloignée de la pièce, z la distance des ts d'appui, p le poids par mètre courant, uniformément réparti sur la . Le rapport $\frac{I}{n}$ est connu pour une pièce de section donnée. Posons

$$\frac{8.RI}{n} = C, \quad \frac{1}{z^2} = y.$$

relation (1) devient $Cy = p$.

rtons en abscisses les valeurs de p, en ordonnées les valeurs de y. eu est une droite passant par l'origine. Si l'on donne à C des va- successives, on obtient autant de droites remplissant la même condi- [1].

rsqu'au lieu d'un poids p, uniformément réparti, on a un poids P au u de la pièce de longueur z, le moment fléchissant maximum est $\frac{Pz}{4}$ n peut encore se servir des Tableaux de droites concourantes dressés le cas des poids uniformément répartis, à la seule condition de poser

$$\frac{pz^2}{8} = \frac{Pz}{4}, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{pz}{2}.$$

V. — Abaques à circonférences pour les fourneaux de mines.

9. Nous exposerons encore un cas intéressant de transformation ana- hique qui trouve son application dans la construction des abaques la solution des problèmes relatifs aux fourneaux de mines.

nsidérons l'équation

$$x^2 + (1 - \alpha^2)y^2 - 2\alpha hy = h^2.$$

pour x et y variables, est celle d'une ellipse ayant son centre sur l'axe [2]. Pour que cette équation représentât un cercle, il faudrait que les

---

M. le chef de bataillon Chéay a construit, d'après ce principe, quinze abaques gnes, applicables aux pièces de bois, aux madriers, aux fers à planchers des pales usines (*Pratique de la résistance des matériaux dans les constructions*, 1877. p. 16, planches 7 à 24).

Désignons (*fig.* 99) par C la charge de poudre placée en O dans un fourneau ne, par x le rayon à la base de l'entonnoir d'explosion AOB, par y la ligne indre résistance, c'est-à-dire la profondeur de la charge au-dessous de la e horizontale du sol, par g un coefficient qui varie avec la nature du terrain qualité de la poudre, par α un nombre constant (égal à 0,41). Une analyse

coefficients de x^2 et de y^2 fussent égaux. Une graduation convenable des axes permettra de remplacer l'équation (1) par une autre qui satisfasse à cette condition.

Il suffira de poser

$$(2) \qquad y'^2 = (1 - \alpha^2) y^2;$$

remplaçant y, dans (1), par sa valeur tirée de (2), il vient

$$(3) \qquad x^2 + y'^2 - 2\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} hy' - h^2 = 0.$$

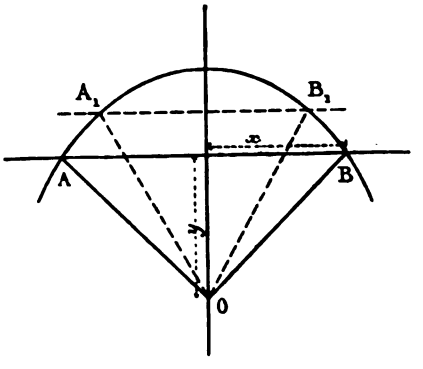
---

fondée sur les résultats d'expériences établit, entre ces quantités, la relation

$$C = g\left(\sqrt{x^2+y^2} - \alpha y\right)^3.$$

On nomme *fourneau ordinaire* celui pour lequel le rayon de base de l'entonnoir

Fig. 99.



est égal à la profondeur des poudres. On a, dans ce cas particulier,

$$x = y = h \quad \text{et} \quad C = gh^3,$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2} - \alpha y = h.$$

Faisant disparaître le radical et réduisant, on est conduit à l'équation (1) du texte. Cette équation est celle de la courbe des bords de l'entonnoir, c'est-à-dire du lieu des points tels que A et B, A_1 et B_1, ..., qui limitent les bords des entonnoirs successifs obtenus avec une charge constante C, mais avec des profondeurs de charge variables. Voir Ricour, *Extrait d'un Mémoire sur les mines militaires*, dans le *Mémorial de l'officier du Génie*, n° 21, 1873, p. 323 à 329. Le même volume contient toute une série de tableaux dressés par le capitaine Ricour, par le commandant Guillemot et par le capitaine Delambre. Tous ces tableaux ont pour objet la résolution graphique du problème des mines.

Cette équation, qui n'a pas de terme en x, est celle d'un cercle dont le centre est sur l'axe des y, à la distance

$$(4) \qquad d = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, h$$

de l'origine, et dont le rayon est

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\, h^2 + h^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, h.$$

Si, dans les expressions (2) et (4), on remplace α par sa valeur numérique, qui est 0,41, on a

$$y' = 0{,}91\, y, \quad d = \frac{0{,}91}{2}\, h.$$

En inscrivant sur l'axe des y' non plus les valeurs de y', mais les valeurs correspondantes de y, nous aurons pour coordonnées numériques d'un point quelconque du cercle des valeurs de x et de y qui satisferont à l'équation (1) proposée.

Ainsi se trouve opérée la transformation anamorphique de l'ellipse primitive en un cercle.

La valeur 91 de y' correspondant à la valeur 100 de y, on effectuera la graduation en portant sur l'axe des y' la longueur 91 mesurée sur l'échelle des x. Cette longueur, divisée en 100 parties égales, donnera les divisions pour y.

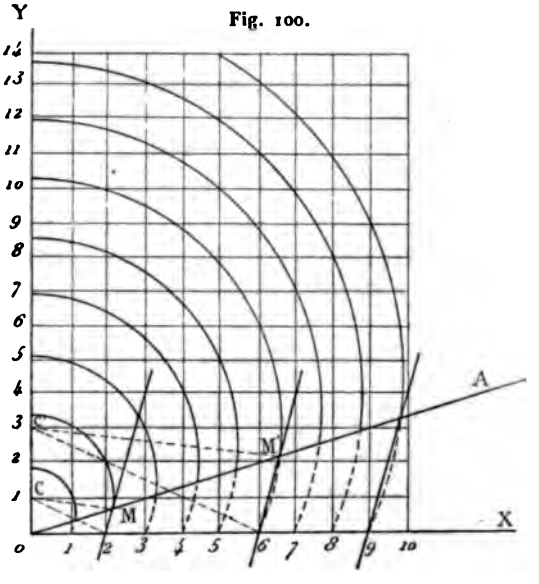
En attribuant à h des valeurs constantes successives, on a pour chacune de ces valeurs un cercle différent. On vient de voir que l'un quelconque de ces cercles a son centre sur l'axe des y, à la distance absolue $\frac{0{,}91}{2}\, h$ de l'origine; mais, d'autre part, l'unité de longueur du même axe est $\frac{1}{0{,}91}$. Le centre de chacun des cercles est donc sur la division marquée de la valeur numérique $\frac{h}{2}$ qui le caractérise.

Si l'on fait, dans l'équation (1), $y = 0$, on trouve $x = h$; d'où il suit que l'un quelconque des cercles passe par la division de l'axe des x numériquement égale à la valeur correspondante de h. Les axes étant ainsi gradués, on obtiendra l'un quelconque des cercles du tableau graphique (*fig.* 100), par exemple, celui qui correspond à la valeur 6 de h, en prenant pour centre le point marqué 3 sur l'axe des y et pour rayon la droite qui joint ce point au point marqué 6 sur l'axe de x. Ce cercle sera coté 6.

La formule des mines n'ayant plus d'application lorsque x dépasse $3y$,

on pourra arrêter tous les cercles à leurs points d'intersection avec la droite oA déterminée par l'équation $x = 3y$. Les distances de ces points d'intersection à l'origine sont proportionnelles aux cotes des cercles marquées sur l'axe des X. Il résulte, en effet, de la construction, que dans les triangles tels que $Mo2$, $M'o6$, semblables et semblablement placés, les côtés, tels que $M2$, $M'6$, constituent un faisceau de rayons parallèles qui coupent les

Fig. 100.



transversales oA, oX, suivant deux ponctuelles semblables (G. 57). On voit aussi par là que l'origine est un centre de similitude commun à tous les cercles.

V. — Abaque des piles. Graduations d'axes parallèles.

150. Soient C l'intensité du courant produit par l'accouplement en *tension* de n éléments égaux, orientés dans un même sens, R la résistance du circuit interpolaire, r la résistance d'un seul élément, c l'intensité du courant avec un seul élément et pour le même circuit. Si l'on pose

$$\frac{R}{r} = x, \quad \frac{C}{c} = y,$$

on a la relation

$$(1) \qquad y = \frac{n(x+1)}{x+n},$$

qui sert à déterminer l'une des trois quantités x, y, n, quand on connaît les deux autres.

La nature du problème ne permet de considérer que les valeurs positives de ces quantités, c'est-à-dire des coordonnées de l'hyperboloïde représenté par la relation (1); n ne peut d'ailleurs désigner qu'un nombre entier d'éléments.

Si, le plan des xy étant supposé horizontal, on attribue à n des valeurs constantes successives, on obtient, comme lignes d'égal élément, des hyperboles dont les principaux caractères résultent de ce que, pour les valeurs

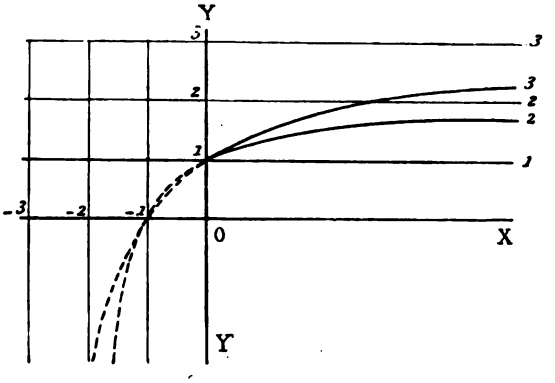
$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \infty, \quad y = \infty$$

attribuées à l'une ou à l'autre variable, on a respectivement

$$y = 1, \quad x = -1, \quad y = n, \quad x = -n.$$

Conséquemment (*fig.* 101), toutes les hyperboles coupent l'axe des y au point 1, l'axe des x au point -1, et chacune d'elles a pour asymptotes les parallèles aux axes dont les coordonnées sont $y = n$, $x = -n$. Dans

Fig. 101.



le cas où $n = 1$, l'hyperbole se réduit aux deux droites $x = -1$, $y = 1$. Enfin, la bissectrice de l'angle des axes de coordonnées est un axe commun à toutes les courbes.

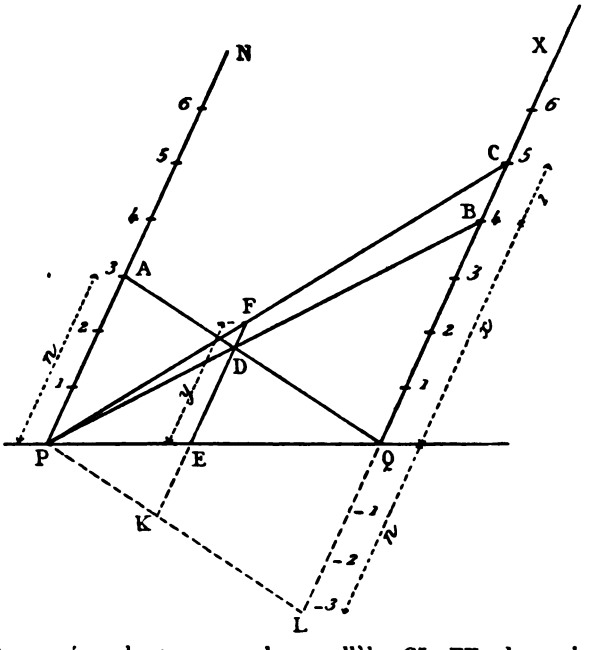
Un tableau de ces hyperboles cotées permettrait de résoudre par simple lecture l'un quelconque des trois problèmes auxquels l'équation (1) donne lieu. Mais on peut substituer à ce tableau de courbes un abaque de droites, soit par l'un des moyens déjà indiqués, soit par la disposition suivante [1].

---

[1] C.-M. Gariel, *Discussion graphique de la formule des piles*, dans l'*Électricien, revue générale d'électricité*, t. I, p. 20, Paris, avril 1881.

151. Soient (*fig.* 102) deux axes parallèles, PN, QX, coupés par une transversale PQ, et supposons que, n et x étant donnés, on veuille déterminer y. Prenons, sur PN, PA $= n$ et, sur QX, QB $= x$, QC $= x + 1$. Joignons QA, PB, PC; menons par le point d'intersection D de QA et de PB la parallèle EF aux axes et par le point P la parallèle PL à QA. Le faisceau

Fig. 102.



P(CBQL), coupé par les transversales parallèles CL, FK, donne immédiatement (G. 57)

$$\frac{\mathrm{EF}}{x+1} = \frac{n}{x+n},$$

d'où

$$\mathrm{EF} = \frac{n(x+1)}{x+n} = y,$$

ce qui est bien la valeur de y donnée par l'équation (1).

On pourra donc aisément, au moyen de deux axes, qu'il sera commode de choisir perpendiculaires à PQ et de compléter par un quadrillé à divisions entières équidistantes, tracer et coter les deux faisceaux de rayons P, Q, qui complètent l'abaque rectiligne de l'équation proposée [1].

---

[1] On pourra, d'ailleurs, tirer directement de cet abaque les mêmes déductions

Si les n éléments considérés, au lieu d'être accouplés en tension, étaient montés en dérivation [1], la relation entre les nouvelles quantités C, c, R, r, n serait encore donnée par l'équation (1), à la seule condition de poser $x = \frac{r}{R}$. Le même abaque pourrait donc servir, pourvu qu'on eût soin de lire sur l'axe QX les valeurs $x = \frac{r}{R}$ au lieu des valeurs $x = \frac{R}{r}$.

VI. — Abaque des lentilles. — Transformation perspective d'une anamorphose.

152. L'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \tag{1}$$

est la relation qu'on établit, dans les miroirs et dans les lentilles sphériques, entre les distances x et y du miroir ou de la lentille à deux foyers conjugués et la distance focale principale n, déterminée par la position que prend l'un des foyers quand son conjugué est à l'infini.

Si l'on gradue deux axes rectangulaires en prenant pour coordonnées $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, on obtient (*fig.* 103) un abaque de lignes droites, dans lequel les valeurs de $\frac{1}{n}$ doivent être lues sur les obliques à 45°. Mais cette disposition présente deux inconvénients : d'une part, en effet, les valeurs

---

théoriques que de l'équation elle-même et de sa traduction géométrique donnée par la *fig.* 101.

Supposons, par exemple, que, la droite QA restant immobile, les rayons PB, PC pivotent autour du point P, sous la condition que le segment CB soit toujours égal à l'unité. Lorque PB coïncidera avec PQ, EF et BC coïncideront tous deux, en direction et en grandeur, avec Q1, d'où il suit que, pour $x = 0$, $y = 1$. Si le mouvement continue jusqu'à ce que PC coïncide avec PQ, EF et BC coïncideront avec Q(−1); donc, pour $y = 0$, $x = -1$. Si B devient le point à l'infini de QX, le point E se confondra avec P, le point F avec A, ce qui revient à dire que, pour $x = \infty$, $y = n$. Si PB, continuant à pivoter, vient prendre la direction parallèle à QA, EF devient la droite à l'infini du plan et, pour $y = \infty$, on a $x = QL = -n$. Enfin, quand $n = 1$, on a toujours QC = LB et, par suite, $y = n = 1$.

Notons en passant que la valeur de y est donnée (33) par le segment OX de la *fig.* 24, quand on fait

$$AO = AQ = x, \quad OB = n, \quad BD = 1.$$

[1] Voir Marcel Deprez, *Théorie graphique des machines dynamo-électriques*, dans *la Lumière électrique, Journal universel d'électricité*, n° 71, Paris, décembre 1881.

croissantes de x et de y fournissant des valeurs décroissantes de u et de v — les divisions deviennent de plus en plus petites, à mesure qu'on se rap—

Fig. 103.

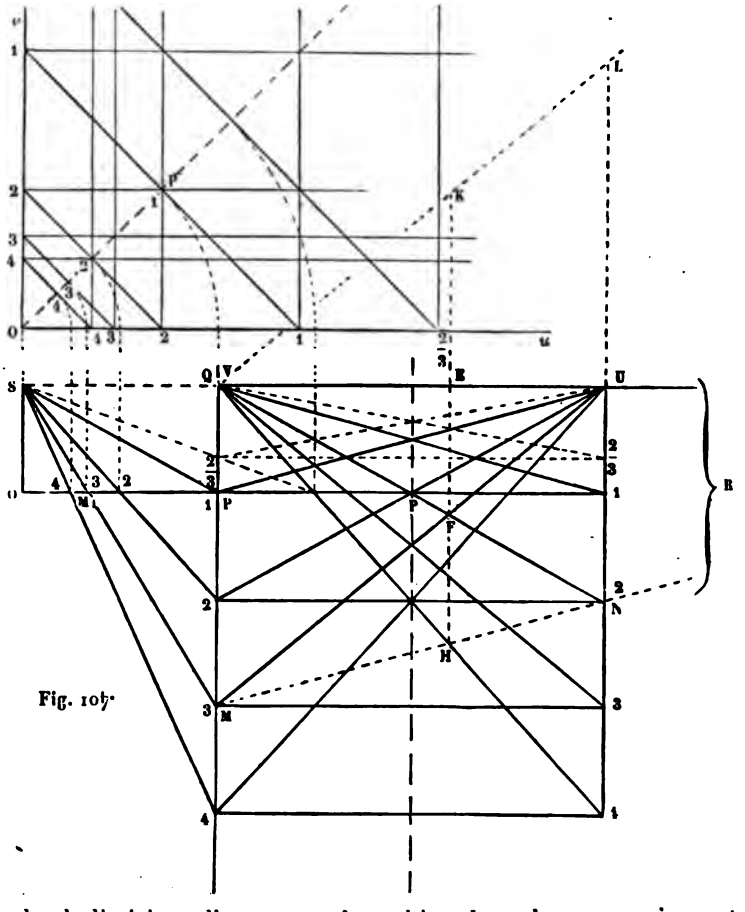


Fig. 104.

proche de l'origine; d'autre part, la position des valeurs comprises entre deux lignes consécutives ne pouvant pas être fixée par une interpolation proportionnelle, le tableau serait d'une lecture difficile dans la plupart des cas.

On supprime ces inconvénients en construisant (*fig.* 104) un second tableau, qui est une anamorphose perspective du premier [1].

---

[1] Voir Gariel, *Transformation perspective d'une anamorphose relative à la formule des lentilles*, dans le *Compte rendu de la 5e session de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Clermont-Ferrand. 1876, p. 140.

Imaginons que l'une des obliques de la *fig.* 103, l'oblique cotée 11, par exemple, soit la trace, sur le plan horizontal de cette figure, d'un plan vertical qui est représenté par la droite PQ dans la coupe verticale suivant OP (*fig.* 104, à gauche) de la *fig.* 103. Si, d'un point S, pris arbitrairement sur la verticale élevée à l'origine O, on projette la *fig.* 103 sur le plan PQ, on obtient, comme projection de l'abaque primitif, un nouvel abaque représenté à droite de PQ dans la *fig.* 104. La charnière 11 et le point P se projettent sur eux-mêmes. Le point à l'infini de l'axe des v, centre du faisceau de rayons parallèles à cet axe, se projette à l'intersection V de la ligne d'horizon UV et de la verticale au point coté 1 sur l'axe des v. Le point V devient, par conséquent, le centre du faisceau de rayons concentriques V (1234. ...), suivant lequel se projettent les parallèles à l'axe des v. Le point U est pareillement le centre du faisceau, symétrique au précédent, suivant lequel se projettent les droites qui étaient parallèles à l'axe des u dans la figure primitive. Quant aux obliques à 45°, elles se projettent évidemment suivant des parallèles à la charnière; mais leurs écartements varient proportionnellement à n au lieu de suivre la loi de décroissance inverse dont nous avons signalé le double désavantage. Les triangles semblables SOM_1, MQS donnent, en effet,

$$OM_1 . QM = OS . OP = \text{const.}$$

QM varie donc en raison inverse de OM_1, c'est-à-dire en raison directe de n. On vérifie sur la figure que les écartements décroissants des obliques, ayant pour cotes deux nombres entiers consécutifs, sont remplacés par des écartements égaux entre eux et dont la mesure est donnée par l'élévation du centre S au-dessus du point O. Dans ces conditions, si l'on cherche, par exemple, la valeur EF de n, donnée par deux rayons U3, V2 dont l'intersection est comprise entre deux parallèles consécutives, 11, 22, on aura la fraction qui doit être ajoutée au nombre 1, lu sur la parallèle supérieure, en effectuant, à vue ou graphiquement, le partage proportionnel de la distance qui sépare les parallèles 11, 22.

153. L'équation (1), qui peut être mise sous la forme

$$n(x+y) = xy, \tag{2}$$

représente une hyperbole équilatère rapportée à deux axes rectangulaires passant par un des sommets. Les asymptotes, parallèles aux axes, se coupent au point dont les coordonnées sont $x = y = n$. Le second sommet a pour coordonnées $x = y = 2n$.

Quand on suppose n variable, les sections planes pratiquées dans la surface (2), parallèlement au plan des xy, et projetées normalement sur ce

plan, donnent un abaque d'hyperboles équilatères ayant un sommet commun et le même axe principal.

Si l'on pose

$$x = z + n, \quad y = t + n,$$

ce qui revient à prendre pour variables les distances des foyers conjugués au foyer principal, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad zt = n^2.$$

Toutes les hyperboles sont alors rapportées à leurs asymptotes communes et forment un abaque analogue à celui de la Table de Pythagore (105). Cet abaque peut à son tour être anamorphosé en un autre rectiligne par le procédé de graduation logarithmique précédemment indiqué (130). L'écartement des parallèles relatives aux valeurs de n varie alors, non plus en raison inverse ou directe de n, comme dans les deux figures précédentes, mais en raison directe de $2 \log n$.

On peut enfin, par un procédé analogue à celui du n° 151, construire l'abaque rectiligne de la *fig.* 104 sans passer par la *fig.* 103. On prend à cet effet (*fig.* 104) $UN = x$, $VM = y$ et, par le point d'intersection F de UM et de VN, on mène, parallèlement à UN, le segment FE, qui est la valeur correspondante de n. Si l'on prolonge, en effet, FE et UN jusqu'à leurs points d'intersection K, L, avec la parallèle menée par le point V à UM, on a

$$\frac{FE}{FK} = \frac{NU}{NL},$$

c'est-à-dire, d'après les données de la construction,

$$FE = \frac{xy}{x+y} = n.$$

On peut rattacher directement cette construction à l'équation (1), considérée dans sa forme primitive, en prolongeant VU et EF jusqu'à leurs points d'intersection R et H avec MN. Chacune des diagonales du quadrilatère UMVNR ∞ étant divisée harmoniquement par les deux autres (G. 32), on a, d'une part (G. 35),

$$EH = 2EF$$

et, d'autre part (G. 39),

$$\frac{1}{UR} + \frac{1}{VR} = \frac{2}{ER};$$

divisant tous les termes par tang VRM et faisant $UN = x$, $VM = y$, il vient

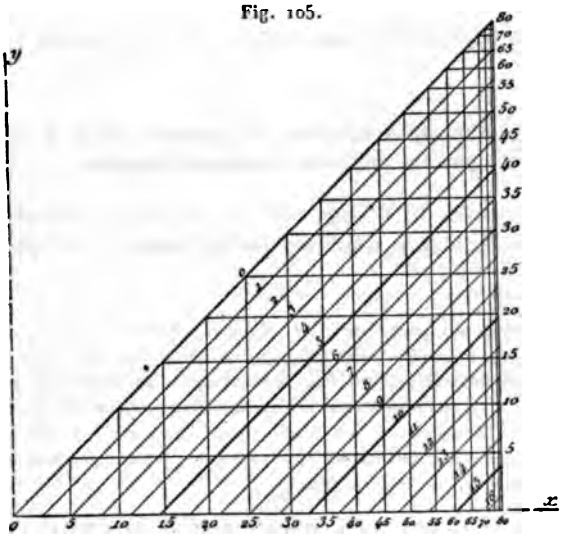
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{EF}.$$

VII. — Application de l'anamorphose à des lois dont l'expression mathématique n'est pas connue.

154. Certaines lois naturelles peuvent être exprimées mathématiquement en fonction d'éléments variables, qui dépendent eux-mêmes d'autres variables déterminées par de simples relevés numériques dont la loi générale est inconnue. L'anamorphose est encore applicable dans ce cas, pourvu que les termes numériques soient suffisamment rapprochés.

Supposons, par exemple, qu'une table numérique, se rapportant à une population déterminée, donne le nombre des individus dont l'âge est inférieur, ou tout au plus égal à 1, 2, 3, ..., x années. Il s'agit de con-

Fig. 105.



struire, sans autres données, un tableau graphique qui fasse connaître le nombre z d'individus compris entre deux âges quelconques, x_1 et x_2.

Soit y_1 le nombre d'individus dont l'âge est compris entre o et x_1, y_2 le nombre de ceux dont l'âge est compris entre o et x_2. On ne connaît pas la forme des fonctions $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, mais on a, entre l'inconnue z et les données y_1, y_2 de la statistique, la relation

$$z = y_1 - y_2,$$

c'est-à-dire l'équation d'un plan dont les lignes de niveau sont des droites parallèles.

La *fig.* 105, construite d'après ces considérations, emprunte ses élé-

ments numériques au tableau dressé par Demontferrand pour la répartition de la population française mâle en 1833. On a porté sur les axes, à raison de 4^{mm} par million de sujets mâles, des longueurs proportionnelles aux nombres y de ces sujets, dont l'âge est compris entre o et x années. On a inscrit comme cotes sur les mêmes axes, non les valeurs y des coordonnées réelles, mais les valeurs correspondantes de x, relevées sur la table numérique. Pour obtenir le nombre d'individus compris entre deux âges déterminés, il faut suivre l'horizontale correspondant au plus petit âge jusqu'à la rencontre de la verticale correspondant au plus grand. La cote de l'oblique sur laquelle on est ainsi conduit exprime en millions le nombre cherché (1).

B. — RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS (2).

VIII. — Résolution de n équations du premier degré à n inconnues par les méthodes de fausse position.

155. Deux points, U, V (*fig.* 106), se déplacent respectivement sur deux droites u, v, sous la condition que la distance x du premier a une

(1) LALANNE, *Méthodes graphiques*, etc., dans les *Notices réunies par les soins du Ministère des Travaux publics pour l'Exposition de Melbourne*, Paris, 1880, p. 374. On trouve dans ce Recueil (p. 376-379) trois abaques du même auteur sur les probabilités de vie, avec anamorphoses successives. Ces constructions avaient déja été indiquées dans le *Mémoire sur les Tables graphiques*, etc., publié en 1846. Les *Notices* précitées contiennent aussi (p. 420-423) deux intéressants abaques de M. EDOUARD COLLIGNON pour les formules

$$\operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} D = -\cos H \quad \text{et} \quad \sin D = \cos\lambda \cos\omega.$$

Le premier de ces abaques donne, en fonction de la latitude λ et de la déclinaison D, les heures du lever et du coucher du Soleil pour un point quelconque du globe terrestre et pour une époque quelconque de l'année. Le second donne les angles azimutaux du lever et du coucher du Soleil; étendu et complété, il pourrait servir à résoudre à vue un triangle sphérique rectangle. La théorie de ces diagrammes avait déjà été donnée par l'auteur dans une *Note sur la résolution, au moyen de Tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie et de Trigonométrie sphérique* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVIII, Paris, 1879). Dans une seconde *Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie* (*Nouv. Ann. de Mathématiques*, 3e série, t. I, 1882), M. COLLIGNON indique l'emploi du même tableau pour déterminer l'heure du passage du Soleil dans le plan vertical Est-Ouest. Il montre aussi comment le diagramme peut être complété de manière à tenir compte de la durée du crépuscule.

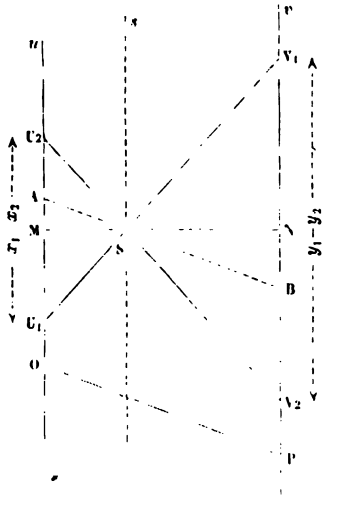
(2) Voir CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure*, 2e édit. Paris, 1880, p. 209.

rigine fixe O, prise sur u, et la distance y du second une origine P, prise sur v, soient toujours liées par la relation

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0. \tag{1}$$

Considérons deux positions du point U, situées aux distances x_1 et x_2 de

Fig. 106.



l'origine O, et les deux positions correspondantes du point V, situées aux distances y_1 et y_2 de P. Nous aurons

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu = 0,$$
$$\lambda x_2 + \mu y_2 + \nu = 0;$$

213. — G. Fouret, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 550, et *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Nantes, 1875. — Briot et Bouquet, *Leçons nouvelles de Géométrie analytique*, 2e édit., p. 234-244. — Desboves, *Questions de Géométrie*, Paris, 1870, p. 293-299, et *Questions de Trigonométrie*. Paris, 1872, p. 71-78. — De Roos, *Aperçu cinématique sur les différents systèmes de tiges articulées*, etc., traduit par Alb. Kapteyn, dans la *Revue universelle des Mines*, etc., 1877, 2e sem., p. 11-17. — Lalanne, *Géométrie arithmographique. Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXI, 1875, p. 1186-1188 et 1243-1246; t. LXXXII, 1876, p. 1487-1490). — *Sur la méthode géométrique pour la solution des équations numériques de tous les degrés* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, 1878, p. 157-159). — *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques*, etc., dans les *Notices réunies par le Ministère des Travaux publics pour l'Exposition de Melbourne*, Paris, 1880, p. 386-392.

d'où

$$\lambda(x_1 - x_2) = -\mu(y_1 - y_2)$$

et

$$(2) \qquad \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = -\frac{\mu}{\lambda} = \text{const.}$$

Les points U et V décrivent donc, sur les droites u et v, des ponctuelles semblables (G. 57).

Lorsque u et v sont parallèles, ce qui est le cas de la figure, les deux ponctuelles ont, comme élément uni, le point à l'infini de ces droites; elles sont par conséquent (G. 45) des sections d'un même faisceau de rayons, dont le centre S partage dans le rapport $-\frac{\mu}{\lambda}$ la distance MN, comprise entre les deux parallèles.

Le rapport

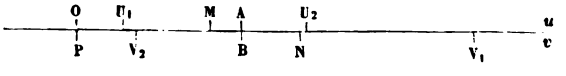
$$-\frac{\mu}{\lambda} = \frac{x}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\nu}{\lambda}$$

est d'ailleurs égal à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{x}{y}$ lorsque, le rayon mobile UV s'approchant de plus en plus de la position s, les deux variables x et y grandissent indéfiniment sans cesser de vérifier la relation (1). Pour trouver la position de la droite s qui contient le point S, il suffira donc de supposer x et y infinis et de chercher la limite de leur rapport.

La distance MN étant quelconque, on pourra toujours assujettir le centre S du faisceau projetant à se trouver sur une droite donnée s, parallèle à u et à v. Il suffira que la droite v, par exemple, étant supposée fixe, la droite u soit déplacée parallèlement à elle-même de la quantité nécessaire pour que les distances de u et de v à s soient dans le rapport $-\frac{\mu}{\lambda}$.

156. Dans le cas particulier où MN = 0, les trois droites s, u, v coïncident (*fig.* 107), et les deux ponctuelles sont superposées (G. 42). Elles

Fig. 107.



sont d'ailleurs opposées ou concordantes (G. 48) selon que le rapport de similitude $-\frac{\mu}{\lambda}$ est positif ou négatif, c'est-à-dire selon que la droite u, avant de coïncider avec v, était ou n'était pas séparée de v par s.

157. On peut superposer les droites u et v de telle manière que les origines O et P se confondent. Les points correspondants A et B, qui étaient, avant le déplacement, sur le rayon du faisceau S parallèle à la droite OP, coïncident après le déplacement et constituent un élément uni AB des deux ponctuelles. On construira cet élément, si l'on connaît deux points correspondants quelconques U_1, V_1, en divisant la distance U_1V_1 dans le rapport de similitude. La distance m du point AB à l'origine OP, exprimée en fonction des distances des points correspondants U_1 et V_1 à la même origine, est d'ailleurs donnée par la relation

$$m = \frac{\lambda x_1 + \mu y_1}{\lambda + \mu},$$

qu'on obtient en faisant

$$x_2 = y_2 = m$$

dans la relation (2) du n° 155.

158. Nous pouvons exposer maintenant les méthodes dites de *fausse position géométrique*, proposées pour résoudre un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues.

Considérons d'abord un système de n équations du premier degré de la forme

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 = 0, \\ &\lambda_2 y + \mu_2 z + \nu_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\lambda_n v + \mu_n x + \nu_n = 0. \end{aligned}$$

Supposons que x soit remplacé par x' dans la dernière équation, et attribuons à x, dans la première, une valeur arbitraire x_1, à laquelle correspondront des valeurs déterminées des variables $y, z, \ldots, v, x'$. Pour que x' fût une racine des équations proposées, il faudrait que cette valeur rendît la dernière équation identique, c'est-à-dire qu'on eût $x' = x_1$.

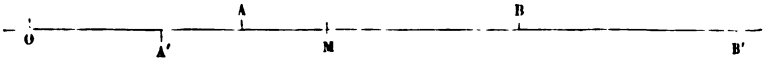
Cela posé, considérons les variables $x, y, z, \ldots, v, x'$ comme représentant respectivement les distances d'une suite de points X, Y, Z, ..., V, X', mobiles sur une droite, à un point fixe de cette droite. La première équation assujettit les points X et Y à décrire deux ponctuelles superposées semblables (156); la deuxième établit la même condition pour les points mobiles Y et Z, ..., et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui exprime que les points V et X' décrivent aussi sur la droite considérée deux ponctuelles semblables. La première et la dernière ponctuelle de cette suite, décrites respectivement par les points X et X', sont évidemment semblables, et l'on voit immédiatement que leur point uni, satisfaisant à

la condition $x' = x_1$, fournira la racine x des équations proposées. Il n'y aura qu'un seul point uni à distance finie, le second étant, par suite de la similitude, le point à l'infini de la droite.

La résolution des équations proposées se réduit donc à construire le point uni de deux ponctuelles semblables superposées.

Soient a' et b' les valeurs de x qu'on déduit de la dernière équation, quand on attribue successivement à x les valeurs a et b dans la première. On porte sur une droite (*fig.* 108), à partir d'un point O pris pour origine, et en tenant compte des signes, des segments OA, OB, OA', OB',

Fig. 108.



respectivement égaux à a, b, a', b'. Le point uni M à déterminer devant satisfaire à la condition générale de similitude, on a

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{MB}{MB'} = \text{const.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{OM - OA}{OM - OA'} = \frac{OB - OM}{OB' - OM},$$

ou

$$\frac{x - a}{x - a'} = \frac{b - x}{b' - x},$$

d'où

$$x = \frac{ab' - a'b}{b' - b + a - a'}$$

et, identiquement, en écrivant deux fois au numérateur le produit ab avec des signes contraires et réduisant,

$$x = \frac{a(b' - b) - b(a' - a)}{(b' - b) - (a' - a)}.$$

La différence $a' - a = \alpha$ entre la valeur de x, déduite de la dernière équation, et la valeur correspondante arbitrairement attribuée à x dans la première, peut être considérée comme l'erreur commise en adoptant la valeur d'essai a. Pareillement, $b' - b = \beta$ est l'erreur relative à la valeur d'essai b. On a donc la relation

$$x = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha},$$

qui est la formule connue de la règle de fausse position.

La méthode est applicable à n équations quelconques du premier degré à n inconnues, alors même que chacune de ces équations contient plus de deux inconnues; il est, en effet, toujours possible de ramener, par voie d'addition, ces équations à la forme de celles que nous venons de considérer.

159. La construction qui va suivre, indiquée par M. Fouret, présente l'avantage de déterminer du même coup, et non plus isolément, les valeurs de toutes les inconnues.

Considérons le système de n équations à n inconnues

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{r} 2(a_1+a_2)x_1+a_2x_2=p_1,\\ a_2x_1+2(a_2+a_3)x_2+a_3x_3=p_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_nx_{n-1}+2(a_n+a_{n+1})x_n=p_n. \end{array}\right.$$

Ajoutons à la dernière équation le terme $a_{n+1}x_{n+1}$, produit du coefficient a_{n+1} par une $(n+1)^{\text{ième}}$ inconnue.

Cette équation devient

$$a_nx_{n-1}+2(a_n+a_{n+1})x_n+a_{n+1}x_{n+1}=p_n,$$

et elle constitue, avec les $n-1$ précédentes, un nouveau système que nous désignerons par (b).

Si l'on attribue à x_1 une valeur arbitraire, dans la première équation du système (b), cette équation permet de déterminer une valeur correspondante de x_2. Les valeurs de x_1 et de x_2, substituées dans la deuxième équation, déterminent une valeur de x_3, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin les valeurs de x_{n-1} et de x_n, déterminées de la même manière et substituées dans la dernière équation (b), conduisent à une certaine valeur de x_{n+1}. Cette valeur serait nulle, si la valeur arbitrairement attribuée à x_1 était précisément celle qui doit satisfaire au système proposé (a). Ce serait là un fait de hasard; mais la méthode consiste à déduire graphiquement les vraies valeurs des inconnues des valeurs qu'on leur a d'abord faussement attribuées.

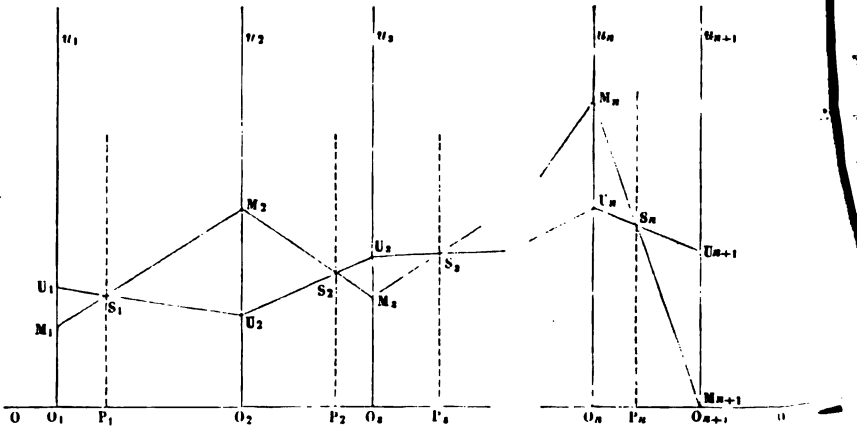
Soient (*fig.* 109) $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$, $n+1$ droites parallèles, coupées orthogonalement par un axe OO. Portons sur u_1, à partir de l'origine O_1, un segment O_1U_1 égal à la valeur arbitrairement attribuée à x_1 et, respectivement, sur $u_2, u_3, \dots, u_{n+1}$, les segments O_2U_2, O_3U_3, ..., $O_{n+1}U_{n+1}$, égaux aux valeurs de $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$, déterminées par $x_1=O_1U_1$. Nous obtenons ainsi les sommets d'une ligne polygonale de fausse position, $U_1U_2\dots U_{n+1}$.

On reconnaîtrait immédiatement, en éliminant entre les équations (b) toutes les inconnues moins deux quelconques consécutives, x_p, x_{p+1}, que celles-ci sont liées entre elles par une relation linéaire de la forme

$$(c) \qquad \lambda x_p + \mu x_{p+1} + \nu = 0;$$

d'où il suit (**155**) qu'en portant sur u_1, à partir de l'axe OO, une suite de

Fig. 109.



valeurs arbitraires de x_1, et sur les autres parallèles, à partir du même axe, les suites correspondantes de valeurs respectivement déterminées pour les autres inconnues, on marquerait sur ces droites les points correspondants de $n+1$ ponctuelles semblables, dont les couples successifs

$$u_1 u_2, \quad u_2 u_3, \quad \ldots, \quad u_n u_{n+1}$$

sont reliés respectivement par les faisceaux de rayons $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Un système de points correspondants, donné par une valeur quelconque de x_1, autre que $O_1 U_1$, fera connaître les sommets d'une seconde ligne polygonale telle que $U_1 U_2 \ldots U_{n+1}$, et les deux lignes se couperont aux centres $S_1, S_2, \ldots, S_n$ des faisceaux. Parmi les lignes polygonales passant par les centres ainsi déterminés, il en est une qui limite, sur les parallèles, des segments égaux aux valeurs des inconnues qui satisfont aux équations proposées : c'est celle qui, aboutissant à l'origine O_{n+1}, annule l'inconnue auxiliaire x_{n+1} introduite dans la dernière équation. Il suffira, pour la construire, de tracer successivement les rayons $O_{n+1} S_n$ coupant U_n au point M_n, $M_n S_{n-1}$, coupant u_{n-1} au point M_{n-1}, ..., $M_2 S_1$, coupant

u_1 au point M_1. Les valeurs des inconnues sont alors représentées, à l'échelle de la figure, par les segments O_1M_1, O_2M_2, ..., O_nM_n.

160. On peut déterminer les centres des faisceaux au moyen d'une seule ligne polygonale de fausse position en remarquant (**155**) que les distances de l'un quelconque de ces centres, S_p par exemple, aux parallèles u_p, u_{p+1} qui le déterminent, sont entre elles dans le rapport particulier

$$-\frac{\mu}{\lambda} = \lim. \frac{x_p}{x_{p+1}},$$

relatif à l'équation de forme (c) qui lie entre elles les inconnues x_p, x_{p+1}.

On divise, en conséquence, les deux membres des équations (b) respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on fait tendre toutes ces variables vers l'infini; on change les signes des rapports $r_1 = \lim \frac{x_1}{x_2}, \ldots, r_p = \lim \frac{x_p}{x_{p+1}}, \ldots$, et les équations ($b$) deviennent, à la limite,

$$\begin{aligned}
-2(a_1 + a_2) + a_2 r_1 &= 0,\\
\frac{a_2}{r_1} - 2(a_2 + a_3) + a_3 r_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
\frac{a_n}{r_{n-1}} - 2(a_n + a_{n+1}) + a_{n+1} r_n &= 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement les rapports suivant lesquels les segments

$$O_1O_2,\ O_2O_3,\ \ldots,\ O_nO_{n+1}$$

de l'axe sont divisés aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ par les parallèles au système de droites u, menées par les centres $S_1, S_2, \ldots, S_n$. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2\frac{a_1}{a_2} + 2,\\
r_2 &= \left(2 - \frac{1}{r_1}\right)\frac{a_2}{a_3} + 2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
r_n &= \left(2 - \frac{1}{r_{n-1}}\right)\frac{a_n}{a_{n+1}} + 2.
\end{aligned}$$

Les points P étant ainsi déterminés, on mènera les parallèles P_1S_1, P_2S_2, ..., qui rencontreront la ligne polygonale $M_1M_2 \ldots M_{n+1}$ aux centres cherchés.

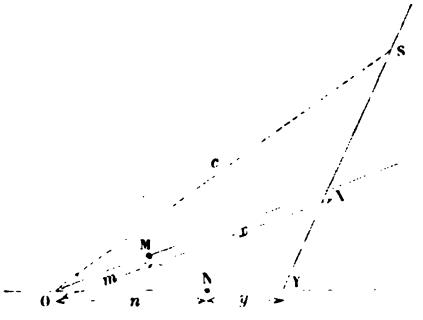
On a vu (**155**) que la distance entre deux quelconques des droites u

étant indéterminée, il suffit, pour assujettir un centre quelconque, tel que S_p, à se trouver sur une droite donnée s, parallèle aux droites u, d'assigner à u_{p+1}, que l'on trace après u_p, une position telle que le rapport des distances de u_p et de u_{p+1} à la droite s soit égal à r_p. On pourra donc, en satisfaisant à cette condition pour toutes les droites u, assujettir les centres de tous les faisceaux projetants à s'aligner sur la droite s [1].

IX. — Résolution des équations du second degré. Méthode de Chasles.

161. Soient (*fig.* 110) OX, OY deux droites fixes, coupées en X et en Y

Fig. 110.



par le rayon mobile SY d'un faisceau S. Si l'on désigne par a, b, d les sinus constants des angles SOX, XOY, SOY, par c, m, n les segments constants OS, OM, ON, par x, y les segments variables MX, NY, on exprimera que la surface du triangle SOY est égale à la somme des surfaces des triangles SOX, XOY, au moyen de la relation

$$ac(m+x)+b(m+x)(n+y)-cd(n+y)=0,$$

soit, après réduction,

$$(1) \qquad \alpha xy+\beta x+\gamma y+\delta=0.$$

[1] La méthode s'applique évidemment à des équations moins simplifiées et, notamment, au système de n équations contenant chacune les n inconnues, système que M. Fouret a considéré dans sa Communication précitée au Congrès de Nantes. Nous avons choisi le système des équations (a), parce qu'on y est conduit dans la solution d'un important problème de Statique appliquée. Voir Fouret, *Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1876, 1er sem., p. 473. — Sacheri, *Determinazione grafica dei momenti inflettenti sugli appoggi di un ponte a più travate*, Torino, 1875. — Collignon, *Cours de Mécanique appliquée aux constructions. Résistance des matériaux*, p. 307.

X et Y étant (G. 40) les points correspondants de deux ponctuelles perspectives, si l'on fait coïncider en même temps les lieux de ces ponctuelles et les points d'origine M et N, on obtient deux ponctuelles projectives superposées dont les couples de points correspondants, rapportés à l'origine commune MN, ne cessent pas d'être liés par l'équation (1). Ces ponctuelles ont, en général, deux éléments unis (G. 43) déterminés par la condition $x = y$. L'équation (1) devient alors

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma) x + \delta = 0, \tag{2}$$

On obtient donc les racines d'une équation de la forme (2) en construisant les points unis des ponctuelles projectives déterminées par l'équation (1) et en mesurant les distances de ces points à l'origine [1].

162. Soient maintenant les deux équations

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0,$$
$$yx + \lambda_1 y + \mu_1 x + \nu_1 = 0.$$

Remplaçons, dans la seconde, x par une autre variable x_1. Nous aurons

$$yx_1 + \lambda_1 y + \mu_1 x_1 + \nu_1 = 0$$

---

[1] On marque, à cet effet, sur une droite [illegible] tances à l'origine [illegible] l'équation [illegible] pondantes [illegible] d'intersection [illegible] partiennent [illegible] effet [illegible] [illegible]

[illegible]

On peut supposer que les trois variables x, y, x_1 représentent les distances de trois points X, Y, X_1, mobiles sur une droite, à une origine fixe prise sur cette droite. La première équation exprime alors (**161**) que X et Y sont les points correspondants de deux ponctuelles projectives superposées et la troisième que les points X_1 et Y sont liés entre eux par la même condition. Il s'ensuit (G. **41**) que les ponctuelles décrites par les points X et X_1 sont aussi projectives entre elles, et, comme le système proposé ne peut être satisfait que pour $x = x_1$, les valeurs cherchées de x seront données par les distances des deux points unis XX_1 à l'origine commune.

Les valeurs de y s'ensuivront naturellement.

163. La même méthode peut être étendue à un nombre quelconque d'équations de la forme précédente

$$\begin{aligned}
xy + \lambda x + \mu y + \nu &= 0,\\
yz + \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 &= 0,\\
zt + \lambda_2 z + \mu_2 t + \nu_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots

droite a, équivalent à p, et un carré b^2, équivalent à q. L'équation prend alors l'une des quatre formes suivantes, qui ne diffèrent que par les signes [1] :

$$x^2 + ax + b^2 = 0, \quad x^2 - ax + b^2 = 0,$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0, \quad x^2 - ax - b^2 = 0.$$

Les deux équations de gauche ayant, au signe près, mêmes racines que celles de droite, il suffit de considérer celles-ci, qu'on peut d'ailleurs écrire

$$x(a - x) = b^2, \quad x(x - a) = b^2.$$

Le problème revient donc à construire un rectangle qui soit équivalent à un carré b^2 et dont la somme ou la différence des côtés soit égale à un segment donné a.

Le même procédé peut être appliqué à l'équation bicarrée, dont il n'y

---

(1) MOHAMMED BEN MUSA donne dans son *Algèbre* des exemples numériques des trois derniers cas, mais il ne considère que les racines positives : il ne parle pas du premier cas, qui ne donne que des racines négatives. Dans le troisième cas, pour lequel les racines sont positives, étant donné qu'elles soient réelles, MOHAMMED dit que, après avoir calculé ces deux racines, on essaye d'abord celle qui est fournie par l'addition de deux termes positifs. Si elle ne convient pas, la seconde, dont le second terme est précédé du signe —, conviendra certainement. Les Indiens, dont les méthodes ont été adoptées par les Arabes (CASIRI, *Bibliotheca arabico-hispana*, t. I, p. 426-428, et t. II, p. 332), admettaient aussi les deux racines quand elles convenaient toutes deux, et en rejetaient une comme absurde dans d'autres cas; souvent même ils omettaient les racines négatives sans y faire la moindre allusion (*Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*, translated by H. T. COLEBROOKE. London, 1817, p. 5, 51, 56, 65, 69). LUCA DI BORGO considère trois cas, comme MOHAMMED. Il donne la solution de chacun et la justifie par des considérations géométriques. Quand les deux racines sont positives, il reconnaît qu'elles peuvent convenir l'une et l'autre dans certains cas, mais que d'autres cas n'en admettent qu'une seule. Ces rapports manifestes entre les travaux de MOHAMMED, des Indiens et de LUCA DI BORGO montrent bien l'origine de notre Algèbre et l'influence directe des Ouvrages arabes sur le caractère et les progrès des Mathématiques à la Renaissance.

Dans une lettre à FRANCESCO TRIVULZIO (*Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum Liber*. Taurini, MDLXXXV, p. 368), J.-B. REVELLI donne la construction de la racine positive de l'équation $x^2 - ax = b^2$. Cette équation exprime, en effet, immédiatement la question qu'il résout, savoir : *Étant données deux droites a, b, on demande d'en trouver une troisième x, telle que l'on ait $x(x - a) = b^2$.* Voir ANTONIO FAVARO, *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*. Modena, 1871; CHASLES, *Aperçu historique*, etc., 2e édit., Paris, 1875, p. 111-120, 510-512; DOSTOR, *Digression historique sur les quantités négatives*, etc., dans les *Nouv. Ann. de Mathém.*, 2e série, t. XIX. Paris, 1880, p. 510.)

a lieu de considérer que les trois types transformés

$$x^4 + ab\,x^2 - c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - ab\,x^2 + c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - ab\,x^2 - c^2d^2 = 0,$$

car la quatrième forme

$$x^4 + ab\,x^2 + c^2d^2 = 0$$

ne donne que des racines imaginaires.

Si l'on pose $x^2 = cz$, ces trois équations deviennent

$$z^2 + \frac{ab}{c}z - d^2 = 0,$$

$$z^2 - \frac{ab}{c}z + d^2 = 0,$$

$$z^2 - \frac{ab}{c}z - d^2 = 0.$$

On détermine les racines z de ces équations par la construction précédemment indiquée, puis on trouve x par une moyenne proportionelle entre c et z.

165. Considérons encore l'équation

$$(1) \qquad \alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0,$$

qu'on peut écrire, en posant

$$x = \operatorname{tang} y = \frac{\sin y}{\cos y},$$

$$\alpha \operatorname{tang} y + \frac{\gamma}{\operatorname{tang} y} - \beta = 0,$$

ou

$$\alpha \sin^2 y + \gamma \cos^2 y + \beta \sin y \cos y = 0.$$

Multipliant tous les termes par 2 et remarquant que

$$2\sin^2 y = 1 - \cos 2y, \quad 2\cos^2 y = 1 + \cos 2y, \quad 2\sin y \cos y = \sin 2y,$$

on a

$$(2) \qquad \beta \sin 2y + (\alpha - \gamma)\cos 2y = \alpha + \gamma.$$

Prenons deux inconnues auxiliaires, m et n, telles que

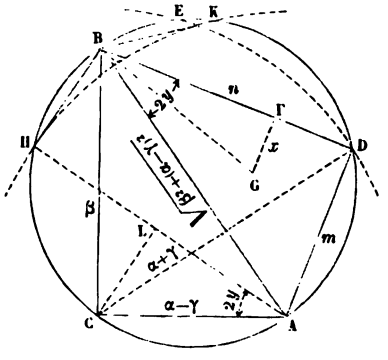
$$\sin 2y = \frac{m}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}}, \quad \cos 2y = \frac{n}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (2), donnent

$$(3) \qquad \beta m + (\alpha - \gamma) n = (\alpha + \gamma) \sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2};$$

d'où l'on déduit la construction suivante :

Fig. 111.



ABC (*fig.* 111) étant un triangle rectangle dont les côtés CB, CA sont respectivement égaux à β et à $(\alpha - \gamma)$, et dont l'hypoténuse est par suite égale à $\sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}$, on trace, du sommet C comme centre, avec $(\alpha + \gamma)$ pour rayon, un arc de cercle qui coupe en deux points, D, E, la circonférence circonscrite au triangle ABC. Le quadrilatère inscrit, déterminé par l'un quelconque D de ces deux points et par les sommets de ABC, donne, en vertu d'une propriété bien connue,

$$\beta . AD + (\alpha - \gamma) . BD = (\alpha + \gamma) \sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2}.$$

Par suite, AD et BD, AE et BE, sont deux systèmes de valeurs de m et de n qui satisfont à l'équation (3) et qui déterminent les valeurs de l'angle $2y$ satisfaisant à l'équation (2). Ces dernières sont d'ailleurs fournies directement par la figure, car on a, par exemple, dans le triangle rectangle ABD,

$$m \quad \text{ou} \quad \sin 2y \sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2} = \sin \widehat{ABD} \sqrt{\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2},$$

d'où

$$2y = \widehat{ABD}.$$

Quant à la valeur de x, correspondant à cette valeur de y, on l'obtiendra en élevant sur BD, à l'unité de distance du point B, la perpendiculaire FG qui rencontre en G la bissectrice de l'angle ABD. On voit immédiatement que $FG = \tang y = x$.

166. On aurait pu varier la construction en prenant le sommet A comme centre d'une circonférence de rayon $\alpha + \gamma$, qui aurait coupé aux points H et K la circonférence circonscrite à ABC. Menons, en effet, BH qui est la tangente à l'extrémité du rayon AH, et abaissons CL perpendiculaire sur ce rayon; on a immédiatement

$$\mathrm{LH} + \mathrm{AL} = \alpha + \gamma = \beta \sin\widehat{\mathrm{CAH}} + (\alpha - \gamma)\cos\widehat{\mathrm{CAH}}:$$

donc

$$\widehat{\mathrm{CAH}} = 2y.$$

167. On peut enfin poser, dans (2),

$$\frac{\beta}{\alpha - \gamma} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

L'équation devient alors

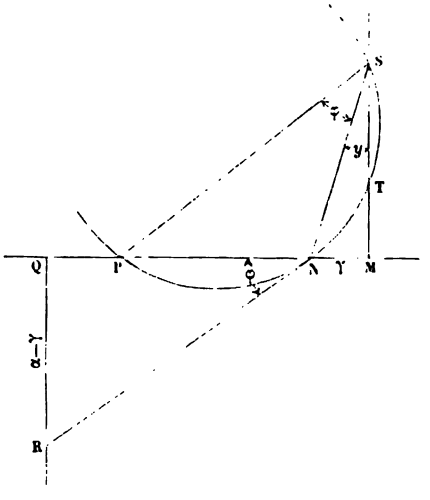
$$\sin 2y \cos\varphi + \cos 2y \sin\varphi = \sin(2y + \varphi) = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}\sin\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin(2y + \varphi) - \sin\varphi}{\sin(2y + \varphi) + \sin\varphi} = \frac{\cos(y + \varphi)\sin y}{\sin(y + \varphi)\cos y} = \frac{\tang y}{\tang(y + \varphi)} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Conséquemment, on porte sur une droite MQ (*fig.* 112) $\mathrm{MN} = \gamma$,

Fig. 112.



$\mathrm{MP} = \alpha$, $\mathrm{NQ} = \beta$, et sur la perpendiculaire à MQ, au point Q, $\mathrm{QR} = \alpha - \gamma$.

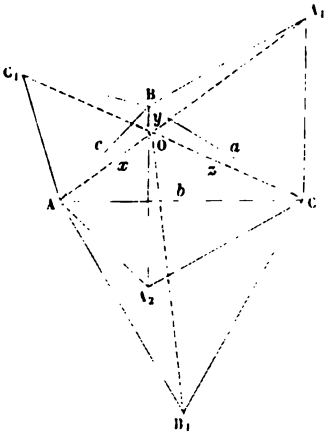
On a

$$\widehat{QNR} = \varphi.$$

Le segment capable de cet angle, décrit sur NP, coupe généralement la perpendiculaire élevée au point M sur MQ, en deux points, S, T, sommets des angles NSM, NTM, qui sont les deux valeurs de y.

168. Construisons (*fig.* 113), sur les côtés a, b, c d'un triangle ABC,

Fig. 113.



et à l'extérieur, trois triangles équilatéraux dont A_1, B_1, C_1 sont les troisièmes sommets. Il est aisé de vérifier que les droites égales AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un point O, d'où les trois côtés du triangle donné sont vus sous des angles de 120°.

Désignons respectivement par x, y, z les distances du point O aux sommets A, B, C. On a, d'après une propriété connue, et en remarquant que $2\cos 120° = -1$,

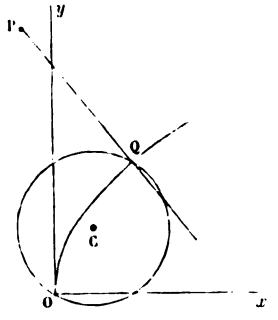
$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = c^2, \\ y^2 + z^2 + yz = a^2, \\ z^2 + x^2 + zx = b^2. \end{cases}$$

Les segments OA, OB, OC donnent donc les valeurs de x, y, z qui satisfont au système des trois équations (1). Ces valeurs, changées de signes, satisfont au même système.

Les triangles équilatéraux tels que A_2BC, construits sur les côtés de ABC dans des positions symétriques de celles que nous venons de considérer, donneraient, en vertu des mêmes propriétés, deux autres solutions du système (1).

169. L'élimination de y entre deux équations du second degré en x et y conduit à une équation finale du quatrième degré en x, dont les racines ne peuvent pas, en général, être obtenues par la règle et le compas. Certains cas particuliers font cependant exception.

Fig. 114.



Soit proposé, par exemple (*fig.* 114), de mener par un point P une normale à la parabole

$$(1) \qquad y^2 = 2px.$$

Les coordonnées du point Q, commun à la normale et à la courbe, étant x et y, celles du point P étant x_1 et y_1, on a

$$y_1 - y = -\frac{y}{p}(x_1 - x),$$

où

$$(2) \qquad xy = (x_1 - p)y - py_1.$$

Multipliant par y et remplaçant y^2 par $2px$, on a

$$x^2 = (x_1 - p)x + \frac{y_1}{2}y,$$

relation qui, additionnée avec (1), donne le cercle

$$x^2 + y^2 = (x_1 + p)x + \frac{y_1}{2}y,$$

dont l'intersection avec la parabole détermine le point Q.

XI. — Résolution de l'équation du troisième et du quatrième degré à une inconnue.

170. L'élimination de y entre l'équation de la parabole $y = x^2$ et celle du cercle

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$

conduit, en posant

$$2\alpha = -q, \quad 1 - 2\beta = p, \quad 2\rho^2 - q^2 - (1 - p)^2 = 4r,$$

à l'équation biquadratique

$$(1) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont les racines réelles sont données par les abscisses des points d'intersection de la parabole et du cercle.

Pour avoir les racines de l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

il suffit d'annuler r dans (1), ce qui revient à introduire dans (2) une racine égale à zéro, et de faire passer le cercle par le sommet de la parabole.

La même parabole peut servir à résoudre toutes les équations du troisième et du quatrième degré; il suffit donc de décrire, dans chaque cas particulier, le cercle qui correspond à ce cas.

Par exemple, pour $p = -2$, $q = -5$, on décrit le cercle passant par l'origine dont le centre a pour coordonnées $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$ et, la racine étrangère $x = 0$ étant écartée, on obtient la seule racine réelle de l'équation, $x = 2{,}09$, en mesurant à l'échelle de la figure l'abscisse du second point d'intersection de la parabole et du cercle.

Pour $p = -5$, $q = 1$ et, par suite, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 3$, on a trois intersections utiles, correspondant à trois racines réelles de l'équation (1).

XII. — Construction des équations du troisième et du quatrième degré. Méthode de Chasles (2).

171. La construction de l'équation du troisième degré, proposée par Chasles, repose sur quelques propriétés dont nous allons d'abord rappeler les énoncés :

(*a*) *Lorsque quatre couples de points en ligne droite*, M *et* N, M′ *et* N′, ..., *sont en involution, les conjugués harmoniques d'un point* A *de la*

---

(1) Quand on fait $p = -\frac{3}{4}$, $q = -\frac{1}{4}\cos 3\varphi$, les racines de l'équation cubique sont $\cos\varphi$, $\cos(\varphi + \frac{2}{3}\pi)$, $\cos(\varphi - \frac{2}{3}\pi)$. On peut ainsi opérer la trisection de l'angle au moyen d'une parabole fixe. (Voir à ce sujet R. Hoppe, *Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades mittelst einer festen Parabel*, dans les *Archiv der Mathematik und Physik*, Leipzig, 1874, p. 110-112. Pour la résolution des équations numériques du troisième degré par la construction des normales à la parabole, voir Gergonne, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, Nîmes, 1818 et 1819.

(2) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, 1855, p. 677-685.

Descartes, Sluze, Newton, Halley, Lhopital, etc., ont appliqué les constructions géométriques à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré; mais leurs méthodes reposent sur des combinaisons algébriques d'équations et tiennent plus encore de l'Analyse que de la pure Géométrie. La solution de Chasles, affranchie des procédés de calcul, est, au contraire, du domaine exclusif de la Géométrie rationnelle.

On a vu que les Arabes savaient construire les racines de l'équation du troisième degré; leur méthode, toutefois, ne diffère pas au fond de celle de Descartes. Les pro-

droite, relatifs à ces quatre couples de points, ont leur rapport anharmonique constant, quel que soit le point A (*Traité des sections coniques*, n° 136).

(*b*) *Les quatre couples de droites qui joignent un point fixe d'une conique aux extrémités des quatre segments* MN, M'N', ..., *interceptent dans la courbe quatre cordes concourantes, dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre segments* (*Traité des sections coniques*, n° 138).

(*c*) *Si, dans l'équation du troisième degré*

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0,$$

les variables représentent des segments mesurés sur une droite, à partir d'un point fixe pris pour origine, de manière que chaque valeur de z détermine un point P *et les deux valeurs correspondantes de x deux points* M, N, *les segments* MN *sont en involution et quatre quelconques d'entre eux ont même rapport anharmonique que les quatre points qui leur correspondent.*

Proposons nous maintenant de construire les racines de l'équation du troisième degré

$$(1)\qquad Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

et considérons d'abord l'équation à deux variables

$$(2)\qquad (Az+B)x^2+Cz+D=0,$$

qui devient la proposée quand on fait $z=x$. Une infinité de systèmes de valeurs conjuguées de x et de z satisfont à l'équation (2) et trois

---

priétés des coniques, dont ils faisaient usage, n'étaient, en effet, que des cas particuliers de la proposition relative au rapport constant du rectangle des ordonnées à celui des abscisses, proposition qui conduit à l'équation des courbes en Géométrie analytique. Les recherches des Arabes marquent un progrès important en Géométrie et en Algèbre, et constituent un acheminement vers l'alliance plus intime de ces deux sciences. Ce point de l'histoire mathématique des Arabes, déjà mis en lumière par l'*Algèbre de* Mohammed ben Musa, a été définitivement établi par L.-Am. Sédillot, dans l'analyse d'un fragment d'Algèbre (manuscrit arabe, n° 1104, de la Bibliothèque nat.), qui contient la résolution géométrique de l'équation du troisième degré. (Voir *Notices et Extraits des Manuscrits*, etc., t. XIII). Woepcke a trouvé depuis, dans un manuscrit de la bibliothèque de Leyde, un exemplaire plus complet du même Traité. Il en a publié le texte et la traduction avec d'autres extraits de manuscrits inédits sous ce titre : *L'Algèbre d'Omar Alkhayyami*, etc., Paris, 1851. Voir Chasles, *Aperçu historique*, etc., 2e édit., Paris, 1875, p. 493, et *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Paris, 1870, p. 226.

d'entre ces systèmes donnent les racines de l'équation (1) : ce sont ceux dans chacun desquels les deux variables sont égales. Pour déterminer ces trois systèmes particuliers, il suffit d'en connaître trois autres quelconques.

Soient, en effet, P_1, P_2, P_3 trois points situés sur une droite OX, aux distances $OP_1 = z_1$; $OP_2 = z_2$, $OP_3 = z_3$ d'une origine fixe O, et soient M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 trois segments correspondants tels que, par exemple, les distances OM_1 et ON_1 sont les deux valeurs x_1 de x, égales et de signes contraires, conjuguées à la valeur z_1 de z. Les rayons AM_1, AN_1, qui joignent un point A d'une conique quelconque C aux extrémités du segment M_1N_1, interceptent sur la conique une corde E_1F_1 qui est coupée au point G_1 par le rayon AP_1. Les systèmes de points P_2, M_2, N_2 et P_3, M_3, N_3 déterminent pareillement deux autres cordes E_2F_2, E_3F_3, et, sur ces cordes, deux autres points, G_2, G_3. Les trois segments MN étant en involution (c), les trois cordes EF concourent en un même point H (b) et les cinq points A, H, G_1, G_2, G_3 déterminent une conique K. Tout autre point G_4, construit, comme les précédents, au moyen d'un quatrième système de valeurs de x et de z, appartient à cette conique, car les points P correspondent anharmoniquement aux segments MN (c) et, par suite, aux cordes EF (b). Les coniques C et K ont trois points communs, autres que A, et chacun de ces trois points est un point G qui coïncide avec l'une des extrémités de la corde EF correspondante. Conséquemment, le rayon AG détermine sur OX un point P qui coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant MN; en sorte que, pour le point considéré, commun aux deux coniques, les variables x et z sont égales entre elles et égales au segment OP, qui est une racine de l'équation. Ainsi, les rayons du faisceau A qui passent par les trois autres points des deux coniques déterminent les trois racines de l'équation proposée [1].

172. La construction des racines de l'équation du quatrième degré repose sur une autre propriété dont voici l'énoncé :

(d) *Si, dans l'équation du quatrième degré à deux variables*

$$x^2(az^2 + bz + c) + x(a'z^2 + b'z + c') + (a''z^2 + b''z + c'') = 0,$$

---

[1] CARDAN (*Ars magna*) donne de nombreux exemples d'application des règles de la Géométrie à la théorie des équations, et notamment à la construction de l'équation du troisième degré. Son Traité *De Aliza regula*, Chap. XII (*De modo demonstrandi geometrice æstimationem cubi*), contient une construction de l'équation $x^3 + q = nx^2$ au moyen de la parabole et de l'hyperbole. (FAVARO, *Notizie storico-critiche*, etc., p. 147 et suiv.). Voir aussi, pour les recherches des Arabes sur la construction des équations du troisième degré, FAVARO, *loc. cit.*, p. 70 et suiv.

le déterminant des neuf coefficients est nul, ce qu'on exprime par la relation

$$a(b'c'' - b''c') + a'(b''c + bc'') + a''(bc' + b'c) = 0,$$

les racines conjuguées de l'équation sont doubles, c'est-à-dire que les deux valeurs de x qui correspondent à une valeur donnée de z correspondent aussi simultanément à une autre valeur de z. Et, si ces couples de racines conjuguées représentent respectivement des segments MN *et* PQ *sur une même droite : 1° les segments* MN *sont en involution; 2° les segments* PQ *sont en involution; 3° les segments* MN *correspondent anharmoniquement aux segments* PQ.

Soit à construire les racines de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

et considérons l'équation à deux variables

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

qui devient la proposée quand on fait $z = x$.

Si l'on attribue à x une valeur x', on aura pour z deux valeurs, z', z'', égales et de signes contraires, et à ces deux valeurs correspondra une même seconde valeur x'' de x. On a ainsi un système de deux couples de racines conjuguées. On peut former une infinité de tels systèmes et trois suffisent pour déterminer tous les autres.

On porte sur une droite OX, à partir d'un point fixe O, les diverses valeurs des variables x et z. Les valeurs x', x'' déterminent deux points M_1, N_1, extrémités d'un segment M_1N_1, et les valeurs correspondantes z', z'', deux points P_1, Q_1, extrémités d'un segment P_1Q_1. Pour un autre système de deux couples de racines conjuguées de l'équation, on a deux autres segments correspondants M_2N_2, P_2Q_2. Trois couples de segments suffisent pour déterminer tous les autres (d) et par conséquent tous les couples de racines conjuguées x', x'' et z', z''. Ils suffisent, notamment, pour déterminer, au moyen d'une construction géométrique, les quatre couples dans chacun desquels les deux segments ont une extrémité commune, auquel cas les deux variables x et z sont égales et constituent les racines de l'équation proposée.

Par un point fixe A, pris sur une conique quelconque C, on mène des droites aux quatre points M_1, N_1, P_1, Q_1. Les deux premières interceptent sur la conique une corde B_1D_1 et les deux autres une corde E_1F_1. Un second couple de segments, M_2N_2, P_2Q_2, donnera pareillement deux cordes B_2D_2, E_2F_2, et un troisième couple, M_3N_3, P_3Q_3, deux nouvelles cordes B_3D_3, E_3F_3. Les trois segments MN étant en involution (d), les trois cordes

BD passent par un même point H (b) et, pour la même raison, les trois cordes EF passent par un même point L. D'autre part, les trois premières rencontrent respectivement les trois autres en trois points G_1, G_2, G_3, qui, avec les points H et L, déterminent une deuxième conique K. Les coniques C et K ont quatre points communs et les droites menées du point A à ces points déterminent sur la droite OX quatre segments qui sont les racines de l'équation proposée.

173. Supposons que, dans l'équation du quatrième degré, le terme D soit nul, et appliquons la construction qui précède à l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Dx^2 + Cx = 0,$$

en ayant recours à l'équation à deux variables

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx = 0.$$

Les trois segments MN ont alors leur commune origine au point O et les trois cordes BD se coupent en un point de la conique C. La conique K passe par ce point, auquel correspond, sur l'axe OX, une racine nulle. Les trois autres points d'intersection des deux coniques donnent les trois racines de l'équation du troisième degré. On a ainsi, pour cette dernière équation, une construction qui diffère de la méthode directe précédemment exposée.

On peut d'ailleurs, dans les divers cas considérés, se servir, pour déterminer les racines, non plus des points d'intersection des deux coniques, mais des tangentes communes à ces deux courbes, ce qui donne une seconde solution géométrique de chaque question [1].

---

[1] Pour les travaux des Arabes sur la construction des équations du quatrième degré, voir F. Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, Paris, MDCCCLI, p. 114-116; — Woepcke, *Sur la construction de l'équation du quatrième degré par les géomètres arabes*, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. VIII, 1863, p. 57-70; — Favaro, *loc. cit.*, p. 86.

Alkhayyami rapporte, dans son *Algèbre*, qu'Alhazen aurait construit l'équation binôme du cinquième degré. Il est à présumer qu'Alhazen est arrivé à ce résultat, soit au moyen des courbes supérieures que les Arabes connaissaient par les travaux des Grecs, soit par un procédé mécanique. La construction d'Alhazen devait probablement se trouver dans son *Mémoire sur la détermination de quatre lignes* (moyennes proportionnelles) *entre deux lignes données*. On a, en effet, x, y, z, t étant les moyennes proportionnelles cherchées, 1 et a les lignes données

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{t} = \frac{t}{a},$$

d'où

$$x^5 = a.$$

Voir Favaro, *loc. cit.*, p. 115.

XIII. — Résolution des équations numériques de tous les degrés. Méthode de M. Lalanne.

174. L'équation du troisième degré ramenée, par l'évanouissement du second terme, à la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

qui ne renferme que deux coefficients, représente une surface, quand on considère l'inconnue x et les coefficients p, q comme des coordonnées variables. Cette surface est un conoïde dont toutes les génératrices rectilignes sont parallèles au plan des pq; car, pour chacune des valeurs successivement attribuées à x, on a une équation linéaire en p et en q. La construction du conoïde permettrait de trouver immédiatement les valeurs de toutes les racines réelles de l'équation. Il suffirait, en effet, d'élever une perpendiculaire au plan des pq par le point dont les coordonnées sont les valeurs numériques de p et de q relatives au cas particulier que l'on considère. Les segments de cette perpendiculaire, compris entre le plan des pq et les différents points de rencontre avec le conoïde, représenteraient les valeurs des racines cherchées.

Mais la nature même du conoïde permet de substituer à ce procédé peu pratique de simples constructions planes linéaires. Il suffit pour cela de tracer sur le plan des pq les projections des lignes de niveau que l'on obtiendrait en coupant le conoïde par une suite de plans parallèles à ce même plan; ces lignes de niveau sont évidemment les droites représentées par l'équation proposée, quand on attribue successivement à x les valeurs représentées par les ordonnées des sections planes. Si l'on construit celles de ces droites qui ont respectivement pour équations

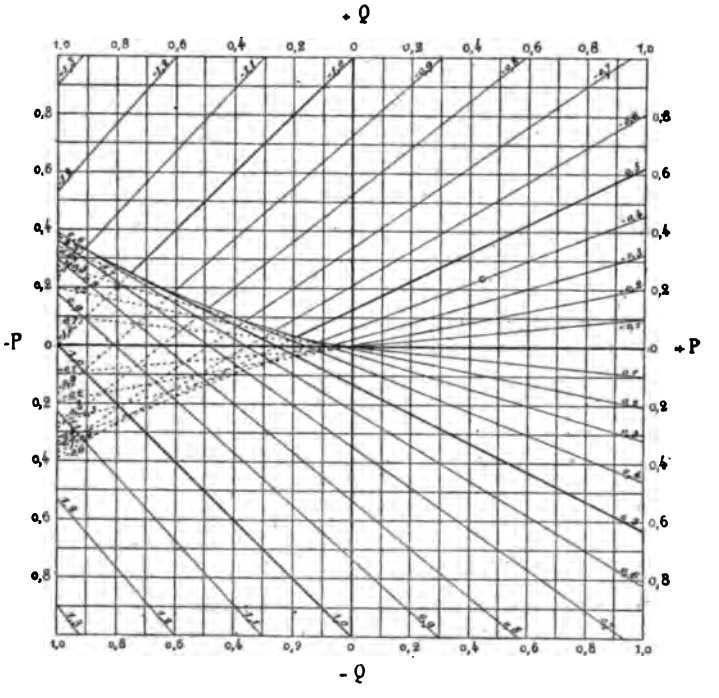
$$\begin{array}{ll} q = -0,1p - 0,001, & q = 0,1p + 0,001, \\ q = -0,2p - 0,008, & q = 0,2p + 0,008, \\ q = -0,3p - 0,027, & q = 0,3p + 0,027, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

jusqu'à $x = \pm 1,3$, on obtient l'abaque de la *fig.* 115. Cet abaque permet de résoudre, avec une approximation suffisante, une équation quelconque du troisième degré, car on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation ordonnée suivant les puissances décroissantes de l'inconnue.

Les valeurs variables p et q sont rapportées, dans la figure, à deux axes rectangulaires, qui divisent le carré total en quatre carrés égaux. Si l'on

prend pour abscisse $p = 0,8$ et pour ordonnée $q = -0,9$, on détermine, dans le carré partiel des p positifs et des q négatifs, un point très voisin de la ligne de niveau qui correspond à $x = 0,7$. Aucune autre oblique de

Fig. 115.



la figure ne passant par ce point, on en conclut que l'équation

$$x^3 + 0,8x - 0,9 = 0$$

n'admet qu'une seule racine réelle qui est approximativement $0,7$.

Si l'équation proposée est

$$x^3 - 0,845x + 0,165 = 0,$$

les valeurs numériques $-0,845$ et $+0,165$ des coefficients déterminent, dans le carré partiel des p négatifs et des q positifs, un point par lequel passent trois lignes de niveau respectivement cotées $+0,8$, $-1,0$, $+0,2$; et il est aisé de vérifier que ces trois valeurs de x satisfont à l'équation proposée avec des approximations qui sont généralement suffisantes. Lorsque le point pq ne tombe pas sur l'une des droites cotées de la figure, on es-

time, par une interpolation à vue, la cote de la droite non tracée qui passerait par ce point.

Les droites déterminées par les diverses valeurs attribuées au paramètre x dans l'équation (1) forment par leurs intersections successives un polygone dont les côtés sont d'autant plus petits que les valeurs de x sont plus rapprochées. Ce polygone devient une courbe lorsque, le paramètre variant d'une manière continue, la droite qui en est fonction se meut elle-même d'un mouvement continu sur le plan de la figure. Cette courbe est l'enveloppe de la droite mobile. On obtient son équation en éliminant x entre l'équation proposée et sa dérivée

$$3x^2 + p = 0$$

par rapport à x. On trouve ainsi la relation

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

qui est indépendante de x et qui convient par conséquent à toutes les intersections déterminées par ce paramètre. La courbe enveloppe représentée par cette relation est une parabole cubique, développée de la parabole

$$q^2 + 4p - 8 = 0.$$

Suivant que le point de la figure, déterminé par un système de valeurs particulières de p et de q, est situé à l'intérieur de l'entonnoir formé par les branches symétriques de l'enveloppe, ou sur cette courbe, ou dans la région externe du plan, ce point est la projection de trois points distincts du conoïde, ou de trois points, dont deux réunis en un seul, ou d'un seul point. L'équation possède trois racines réelles inégales dans le premier cas, trois racines réelles, dont deux égales dans le second cas, et une seule racine réelle dans le troisième cas.

Ces trois cas correspondent d'ailleurs respectivement aux valeurs négatives, nulles et positives du binôme $4p^3 + 27q^2$. On voit ainsi que la considération du tableau graphique conduit aux résultats qui se déduisent ordinairement de la discussion de l'équation du troisième degré.

On remarque, par exemple, que le cas $4p^3 + 27q^2 = 0$ comprend le cas plus particulier des trois racines égales. Ces trois racines sont nulles, puisque leur triple produit est nul, l'équation n'ayant pas de second terme. Le point pq est alors le point de rebroussement de l'enveloppe, placé à l'origine des coordonnées.

175. Considérons maintenant une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré à une seule inconnue

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + nx^2 + px + q = 0,$$

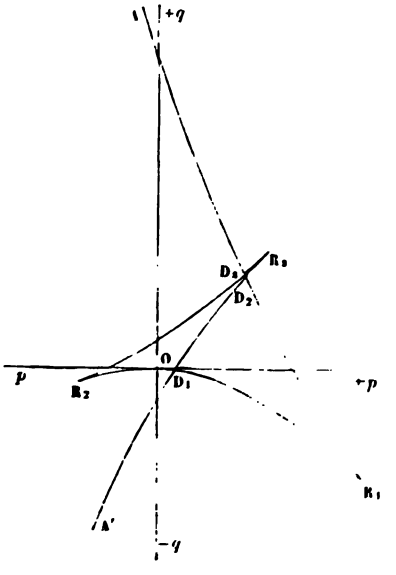
et supposons que deux quelconques des coefficients numériques, les deux derniers par exemple, soient variables; nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$q = -xp - (rx^2 + \ldots + bx^{n-2} + ax^{n-1} + x^n).$$

Cette équation, du premier degré en p et q, représente, pour chaque valeur déterminée du paramètre x, une droite qui est une ligne de niveau du conoïde représenté par l'équation à trois variables en x, p et q.

On pourra donc, comme dans le cas précédemment exposé, construire un abaque de droites cotées, qui fera connaître approximativement les valeurs de x correspondant à chaque point pq du plan, et par conséquent les valeurs des racines de l'équation proposée. Ici encore les droites cotées enveloppent une courbe dont on obtiendra l'équation et que l'on pourra conséquemment construire par points en éliminant le paramètre variable x entre l'équation proposée $f(p, q, x)$ et la dérivée de cette équation par rapport à x. L'équation de la courbe enveloppe résultant de cette élimination est du même degré que la proposée. Cette courbe sépare toujours les régions de la figure qui correspondent aux divers nombres de racines réelles.

Fig. 116.



Par exemple, les droites que représente l'équation

$$q = px + 0,15x^2 - 0,95x^3 + x^5,$$

quand on y fait varier x de dixième en dixième d'unité, depuis $+1$ jus-

qu'à -1, enveloppent une courbe dont les caractères principaux sont accusés par la *fig.* 116. Dans la région centrale $D_1R_2D_3D_2$, les cours de droites qui s'entrecroisent sont toujours au nombre de cinq. Ils sont au nombre de trois dans l'intérieur du triangle curviligne $R_3D_2D_3$ et dans la région à gauche du contour AR_1D_1A'; enfin il n'y a qu'un cours de droites dans la région de la figure située à droite du même contour.

Si, dans l'équation considérée, on fait $p = 0,234$ et $q = 0,067$, le point pq est situé dans la région centrale à cinq cours de droites, et l'équation

$$x^5 - 0,95x^3 + 0,15x^2 + 0,234x - 0,067 = 0$$

a cinq racines réelles. On vérifie, en effet, sur l'abaque dressé à une échelle suffisante, que par le point considéré passent cinq droites dont les cotes respectives $0,4$, $0,5$, $0,6$, $-0,7$ et $-0,8$ sont les racines de l'équation [1].

---

[1] Pour la résolution mécanique des équations d'un degré quelconque au moyen des losanges articulés du général PEAUCELLIER, voir le Mémoire déjà cité de ROOS, dans la *Revue universelle* de CUYPER, 1877, 2e sem., p. 11-17. BORGNIS (*Traité complet de Mécanique appliquée aux arts*, etc. *Des machines imitatives et des machines théâtrales*, Paris, 1820, p. 226-229) décrit un appareil imaginé par CLAIRAUT pour tracer sur un carton une courbe au moyen de laquelle on détermine graphiquement la valeur des racines d'une équation quelconque.

LAGRANGE (*Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École Normale en* 1795, dans le t. VII des *OEuvres de Lagrange*, publiées par M. J.-A. SERRET, Paris, MDCCCLXXVII, p. 269-287) montre comment une équation à une inconnue, de degré quelconque, peut être résolue au moyen d'une courbe dont les abscisses représentent l'inconnue et les ordonnées la valeur du premier membre de l'équation pour toute valeur donnée à l'inconnue. Il indique ensuite les dispositions d'un instrument qui, au moyen de règles mobiles et de charnières, permettrait de décrire la courbe d'un mouvement continu. Cet instrument, dit-il, pourrait ainsi servir à résoudre toutes les équations, ou tout au moins à trouver les premières valeurs approchées des racines, par lesquelles on en trouverait ensuite de plus exactes. Pour le principe de cet appareil, voir FAVARO, *Appendice alle Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*, Modena, 1880, p. 11.

Sur l'application de la théorie de la pesanteur à la résolution des équations et sur la *Balance à résoudre les équations numériques*, imaginée par BÉRARD et réalisée par M. LALANNE, voir ED. COLLIGNON, *Traité de Mécanique*, 2e Partie, *Statique*, 2e édit., Paris, 1881, p. 347-352 et 401-404.

CHAPITRE VII.

TABLES PARABOLIQUES POUR LA DÉTERMINATION DES AIRES DE DÉBLAI ET DE REMBLAI.

LALANNE. *Appendice n° 4 au tome I du Cours de construction de Sganzin*, Paris, 1842. — LALANNE, *Mémoire sur les Tables graphiques*, etc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e série, 1846, 2e sem.) — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zurich, 1866, nos 8-9, et 1875, nos 18-20. — SCHLESINGER, *Vorträge über graphisches Rechnen und Grafostatik*, Wien, 1868-69, nos 84-93. — WINKLER, *Vorträge über Eisenbahnbau*, V Heft, Prag, 1870, p. 17.

I. — Théorie des Tables paraboliques.

176. Les demi-profils en travers des routes et des chemins de fer sont en général des quadrangles dont trois côtés (l'axe vertical, la demi plate-forme et le talus) déterminent par eux-mêmes, ou par leurs prolongements, un triangle rectangle invariable. Le quatrième côté varie en position et en direction selon les accidents du terrain. Il est réduit à un segment rectiligne lorsque le sol présente une déclivité sensiblement uniforme entre l'axe et le talus (1).

Les demi-profils quadrangulaires peuvent être croisés dans les sections situées partie en déblai et partie en remblai.

La rédaction des projets reposant sur la détermination des aires d'un grand nombre de profils transversaux, on a eu d'abord la pensée de coordonner, dans des Tables numériques à double entrée, les valeurs des aires qui, pour des largeurs de plate-forme et des inclinaisons de talus une fois données, correspondent à diverses *positions* et *directions* de la ligne du terrain. Mais on a bientôt

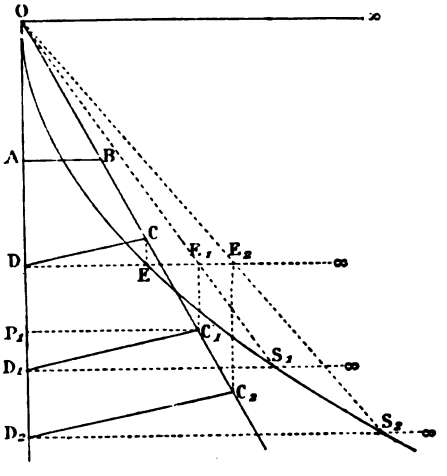
(1) Lorsque cette hypothèse s'éloigne trop de la vérité, le demi-profil quadrangulaire ne peut résulter que de la transformation d'un contour polygonal plus accidenté en un quadrangle équivalent.

trouvé plus avantageux de recourir à des Tables graphiques, dans lesquelles l'aire de chaque demi-profil est immédiatement relevée [1].

Nous allons indiquer le principe, la construction et l'usage de ces Tables.

Soit ABCD (*fig.* 117) un demi-profil en déblai ou en remblai, limité par la plate-forme AB, par la verticale AD sur l'axe, par le talus BC et par la section CD du terrain naturel. Cette dernière ligne varie seule, d'un profil à l'autre, en fonction de deux élé-

Fig. 117.



ments, savoir : la cote sur l'axe et l'inclinaison du terrain. Si l'on admet tout d'abord que ce dernier élément reste constant, les diverses positions CD, C_1D_1, C_2D_2, ... de la ligne de terrain seront parallèles entre elles.

On considère l'aire du demi-profil ABCD comme différence des aires des triangles OCD, OBA, et l'on réduit les triangles OCD, OC_1D_1, OC_2D_2 ..., à une base commune OD, de telle sorte que les sommets des triangles réduits soient situés sur les horizontales des points D, D_1, D_2, ...

---

(1) Tenner a proposé, en 1828, une Table satisfaisant à ces conditions (*Kurze Beschreibung eines Planimeters*. Darmstadt, 1828). Cette Table a été récemment reproduite par Koch (*Beschreibung einiger Hülfsmittel für geometrische Arbeiten, vornämlich zur erleichterten Anwendung des Metermaasses*, dans le *Cultur-Ingénieur*, III, Band. II Heft. Braunschweig, 1871, p. 152, 153.)

On projette, à cet effet, par des rayons verticaux, les points C, C_1, C_2, ..., en E, E_1, E_2, ..., sur l'horizontale du point D. On projette ensuite les points E, E_1, E_2, ..., par des rayons issus du point O, sur les horizontales des points D, D_1, D_2, ..., en E, S_1, S_2, ...

Les triangles primitifs OCD, OC_1D_1, OC_2D_2, ... sont respectivement équivalents aux triangles OED, OE_1D_1, OE_2D_2, ..., lesquels sont équivalents aux triangles OED, OS_1D, OS_2D, ..., qui ont pour base commune OD. On obtiendra donc la valeur des aires des triangles primitifs en multipliant par la demi-base de réduction $\frac{1}{2}$OD les hauteurs DE, D_1S_1, D_2S_2, ... des derniers triangles.

Considérons maintenant les faisceaux formés :

(*a*) Par les rayons parallèles DE, D_1S_1, D_2S_2, ...,

(*b*) Par les rayons parallèles DC, D_1C_1, D_2C_2, ...,

(*c*) Par les rayons parallèles CE, C_1E_1, C_2E_2, ...,

(*d*) Par les rayons convergents OE, OE_1, OE_2, ...

Les faisceaux (*a*) et (*b*) sont perspectifs à la ponctuelle DD_1D_2, ..., et par conséquent projectifs. Les faisceaux (*b*) et (*c*) sont perspectifs à la ponctuelle CC_1C_2, ..., et par conséquent projectifs. Enfin, les faisceaux (*c*) et (*d*), perspectifs à la ponctuelle EE_1E_2, ..., sont aussi projectifs. Il s'ensuit que les faisceaux (*a*) et (*d*) sont projectifs (G. 47) et que le lieu ES_1S_2, ... des points d'intersection de leurs rayons correspondants est une courbe du second ordre passant par les centres des deux faisceaux (G. 62-64), c'est-à-dire par le point O et par le point à l'infini de la direction AB.

Le rayon commun $O\infty$, considéré comme élément du faisceau (*d*), a pour correspondant le rayon à l'infini du faisceau (*a*), c'est-à-dire la droite à l'infini du plan; la courbe engendrée, tangente à cette droite au point ∞, est donc une parabole (G. 95) dont le rayon $O\infty$ est un diamètre (G. 125).

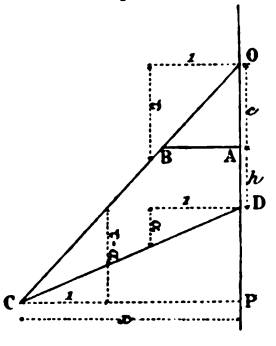
D'autre part, au rayon commun $O\infty$, considéré comme élément du faisceau (*a*), correspond le rayon OD du faisceau (*d*). Ce rayon est donc tangent à la courbe au point O. Il est d'ailleurs perpendiculaire à la direction de son conjugué, qui est le diamètre $O\infty$. Ce diamètre est donc l'axe de la parabole (G. 134-135).

On peut, dès lors, construire la parabole qui correspond à la série des triangles semblables dont le sommet commun est au point O et dont les côtés successifs, opposés à ce sommet, sont les parallèles DC, D_1C_1, D_2C_2, ... L'aire de l'un quelconque de ces triangles, OD_1C_1, égale au produit de la demi-base constante $\frac{OD}{2}$ par D_1S_1, est déterminée par l'abscisse du point S_1 de la parabole qui a pour ordonnée la base réelle OD_1 du triangle considéré.

Pour avoir les mesures des quadrangles ABC_1D_1, ABC_2D_2, ..., c'est-à-dire la suite des profils qui ont même talus et même inclinaison de terrain, il suffira de diminuer les abscisses D_1S_1, D_2S_2, ... de l'abscisse constante f, qui donne la mesure du triangle OAB, réduit à la base OD. On pourra relever directement ces différences sur l'épure en traçant la verticale située à la distance f de OD, dans la direction AB.

177. A chaque nouvelle inclinaison, soit du talus OC, soit de la ligne du terrain CD, correspond une nouvelle parabole. Mais la courbe reste invariable lorsque les inclinaisons de OC et de CD varient simultanément, de telle façon que, dans les triangles OCD, OC_1D_1, ..., le rapport de la base à la hauteur reste constant. Dans ce cas, en effet, les ordonnées bases OD, OD_1, OD_2, ... correspondent toujours respectivement aux mêmes abscisses-hauteurs DE, D_1S_1, D_2S_2, ...

Fig. 118.



On a (*fig.* 118)

$$OD = OP - DP$$

et par suite, si l'on représente respectivement par $\alpha = \frac{DP}{CP}$ et par $\tau = \frac{OP}{CP}$ les déclivités du terrain et du talus,

$$\frac{OD}{CP} = \tau - \alpha = n,$$

n étant la longueur du segment limité par CO et par CD sur la verticale située à l'unité de distance du sommet C.

La base de réduction étant fixée, chacune des paraboles est caractérisée par une valeur particulière du segment n, qui peut être considéré comme l'indice de la courbe.

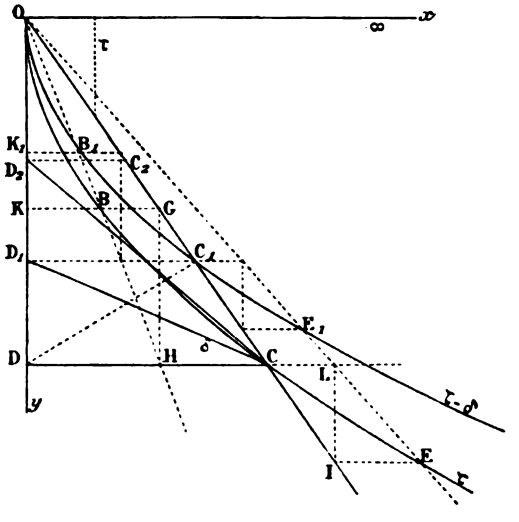
Si l'on attribue successivement diverses valeurs à n, les paraboles correspondantes constituent une *Table graphique des aires*, sur laquelle on peut relever la mesure d'un triangle quelconque réduit à la base fixe qu'on a adoptée.

On détermine, à cet effet, l'indice n du triangle proposé et l'on cherche, sur la Table, la parabole de même indice. La mesure cherchée est fournie par l'abscisse du point de cette parabole qui a pour ordonnée la base du triangle proposé.

178. On facilite la construction et la lecture de la Table, en se donnant pour condition que les paraboles divisent en parties égales les rayons du faisceau O. Il suffit pour cela de faire varier l'indice en progression arithmétique.

Soit, en effet, OC (*fig.* 119) un rayon quelconque qui coupe au

Fig. 119.



point C l'horizontale menée par l'extrémité D de la double base OD, et soit τ la déclivité par mètre de OC, c'est-à-dire la tangente trigonométrique de l'angle OCD. Le triangle OCD ne comporte pas de réduction, puisque sa base est précisément OD, et l'on a

$\alpha = 0$, $n = \tau$. Le point C appartient donc à la parabole d'indice τ.

Considérons maintenant un autre triangle, OD_1C, et soit δ la tangente de l'angle D_1CD que le côté D_1C fait avec l'horizontale. Menons D_1C_1 parallèle à DC. La réduction à la base donnée a pour effet de substituer au triangle OD_1C le triangle équivalent ODC_1. Le point C_1 appartient donc à la parabole d'indice $\tau - \delta$, sur laquelle on devra lire l'aire du triangle OD_1C.

On a d'ailleurs

$$\frac{OC}{C_1C} = \frac{OD}{D_1D} = \frac{CD.\tau}{CD.\delta} = \frac{\tau}{\delta}.$$

Si l'on considère enfin un troisième triangle OD_2C, tel que $\operatorname{tang} D_2CD = 2\delta$, on a, pour un troisième point C_2 de OC, situé sur la parabole d'indice $\tau - 2\delta$, la relation

$$\frac{OC}{C_2C} = \frac{\tau}{2\delta},$$

qui, rapprochée de la précédente, conduit à

$$C_2C_1 = C_1C.$$

Conséquemment, deux paraboles dont les indices diffèrent d'une quantité constante interceptent un segment constant sur un rayon quelconque du faisceau O.

179. Pour obtenir les points où l'une quelconque des paraboles, par exemple celle d'indice τ, rencontre d'autres rayons OB, OE, ... du faisceau O, on projette sur OC, parallèlement à la tangente au sommet OD_1, commune aux paraboles, les points H, L, ..., où les rayons OB, OE, ... rencontrent l'horizontale du point C, commun au rayon OC et à la parabole τ. On projette ensuite, sur les rayons OH, OL, et parallèlement à DC, les points G et I obtenus par la première projection. On détermine ainsi les points cherchés B et E. En effet, les faisceaux de rayons ∞ (OGCI, ... et O) DHCL, ..., tous deux projectifs à la ponctuelle OGCI, ..., sont projectifs entre eux et engendrent une courbe du second ordre. Cette courbe est d'ailleurs une parabole dont la verticale OD est la tangente au sommet O, car au rayon $O\infty$, commun aux deux faisceaux, correspond la droite à l'infini dans le premier faisceau et la droite OD dans le second. Enfin, la

courbe passe par le point C; elle se confond donc avec la parabole τ.

On déterminerait de la même manière les points d'intersections B_1, E_1, ... des rayons OB, OE, ... et de la parabole $\tau - \delta$.

180. Il résulte de la construction précédente que tous les rayons issus du point O sont coupés par des paraboles en des points correspondants des ponctuelles semblables OB_1B, ..., OC_1C, ..., OE_1E, ... On vérifie cette propriété directement, en observant que toutes les paraboles ont même sommet et même tangente au sommet; qu'elles constituent par conséquent des courbes semblables et semblablement placées, dont le point O est le centre de similitude (G, 260, 261).

Il suit de là que, si deux rayons du faisceau O rencontrent l'une des paraboles en B et C, l'autre en B_1 et C_1, les cordes correspondantes BC et B_1C_1 sont parallèles, de même que les tangentes correspondantes en B et B_1 ou en C et C_1. En d'autres termes, les paraboles coupent tout rayon du faisceau O sous un angle constant.

On a d'ailleurs, puisque les droites BC, B_1C_1 sont parallèles,

$$\frac{B_1B}{C_1C} = \frac{OB}{OC},$$

et par suite, en projetant sur Oy, parallèlement à Ox, B_1B en K_1K, C_1C en D_1D,

$$\frac{K_1K}{D_1D} = \frac{OK}{OD} = \frac{DH}{DC} = k.$$

II. — Construction des Tables paraboliques.

181. Soient O (*fig.* 120) l'origine des coordonnées, OX l'axe des abscisses, qui est aussi l'axe commun des paraboles, OY l'axe des ordonnées, qui est la tangente commune au sommet O. Sur la bissectrice OC de l'angle droit XOY, on marque les points équidistants par lesquels doivent passer les paraboles successives. On peut, par exemple, donner à l'intervalle constant, compris entre deux points consécutifs quelconques, une longueur telle que les horizontales et les verticales de ces points divisent le papier en carrés d'un centimètre de côté.

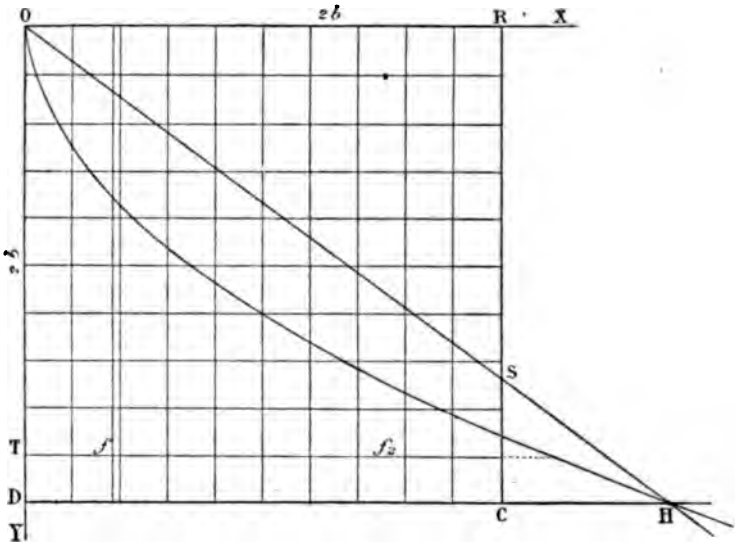
Soit OH un rayon quelconque coupant en un certain point H l'horizontale menée par l'extrémité D de la base de réduction OD.

On a DC = OD et par suite (180)

$$DH = k.DC = k.OD,$$

k étant le rapport qui existe entre la différence des ordonnées de deux points quelconques de OH et la différence connue Δ des ordonnées des points de OC respectivement situés sur les mêmes

Fig. 120.



paraboles que les premiers. On construit les points des paraboles situés sur OH, soit par la méthode de projection précédemment indiquée (179), soit en déterminant (*fig.* 119) le point B par la double projection HG, GB et en divisant le segment OB en autant de parties égales que OC.

Les résultats de cette construction pourraient ne plus être suffisamment précis quand les rayons font des angles très aigus avec les horizontales. Soient OE un de ces rayons et h le rapport qui doit exister entre la différence de ses ordonnées et la différence Δ des ordonnées correspondantes de OC. On prend une ordonnée OD, égale à $h\Delta$ ou à un multiple de $h\Delta$. Le rayon OE coupe DC en

un point L, tel que $DL = h.OD$, et l'on obtient les points des paraboles situés sur OE en divisant OL en $\frac{OD}{h\Delta}$ parties égales.

182. Une parabole étant déterminée quand on connaît son axe, son sommet et un autre de ses points, il est aisé de voir que la table des paraboles ne change pas quand on substitue une nouvelle base de réduction à celle qu'on avait d'abord adoptée. En d'autres termes, une table construite sur une base de réduction déterminée peut servir pour une autre base quelconque, à la seule condition de changer en conséquence les indices des paraboles.

L'indice de l'une quelconque de ces paraboles étant égal à la différence $\tau - \alpha$ des tangentes des angles que fait l'horizontale avec le talus et avec la ligne du terrain, on affectera dans chaque cas de l'indice 1 la parabole passant par le point C, dont l'abscisse DC et l'ordonnée OD sont toutes deux égales à la double base adoptée $2b$. On a en effet pour le triangle ODC, qui ne comporte pas de réduction, $\tau = 1$ et $\alpha = 0$.

Quant aux indices des autres paraboles, ils sont déterminés, comme on l'a vu, par les numéros d'ordre des divisions proportionnelles marquées sur les rayons du faisceau O.

La relation entre la double base $OD = 2b$ et l'indice n se déduit de la considération des triangles équivalents (176) OS_1D, OC_1D_1 (*fig.* 117). On a en effet

$$OD.S_1P_1 = OD_1.C_1P_1.$$

Mais (177)

$$C_1P_1 = \frac{OD_1}{n}.$$

On a donc, en posant $OD_1 = y$ et $D_1S_1 = x$:

$$y^2 = 2bnx,$$

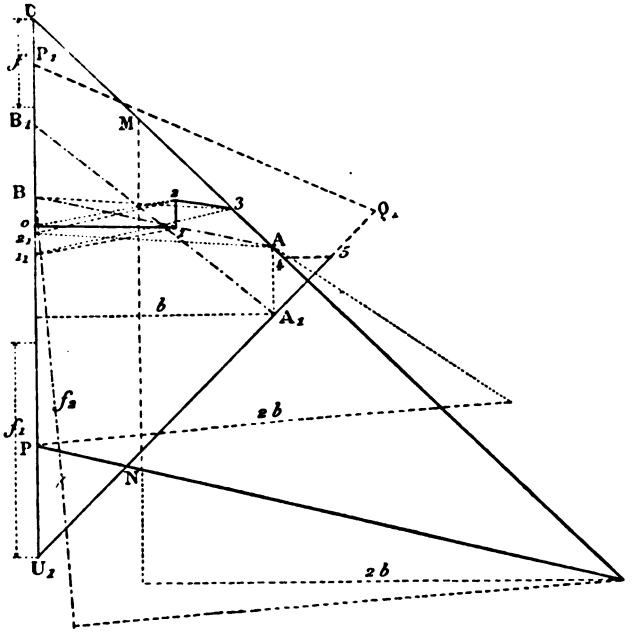
équation de la parabole d'indice n qui correspond à la double base $2b$.

On voit par cette équation que, pour une parabole donnée, la base de réduction et l'indice sont inversement proportionnels.

III. — Usage des Tables paraboliques.

183. Soient 0123Q... (*fig.* 121) le contour polygonal cor mun à une suite de demi-profils en remblai, PQ la ligne variab du terrain et U le point où la droite Q3 prolongée rencont l'axe vertical Po. L'aire de chacun des demi-profils proposés e égale à la différence entre l'aire du triangle UPQ, limitée da chaque cas par une position de PQ, et l'aire constante 0123U Pour réduire cette aire à la base donnée *b*, on détermine s QU le point A, situé à la distance *b* de Po et l'on mène l droites 11_1, 22_1, 3B, respectivement parallèles aux droites 2 31_1, $A2_1$. Le polygone 0123U se trouve ainsi transformé en u

Fig. 121.



triangle équivalent AUB, qui a pour hauteur la base d et pour base UB le double du segment *f*, mesure de l'a trancher.

L'indice $\tau - \alpha$ de la parabole étant donné, pour chaque de PQ, par le triangle UPQ (177), on prend sur les

table (*fig.* 120) les longueurs $OR = OD = 2b$, et l'on porte sur la verticale du point R la longueur RS égale à $2b(\tau - \alpha)$, c'est-à-dire au segment MN (*fig.* 121) limité par les droites QP et QU sur la verticale située à la distance $2b$ du sommet Q. On mène la droite OS qui coupe l'horizontale DC en H. Le point H appartient à la parabole cherchée.

En effet, les triangles semblables ORS, HDO donnent

$$\frac{OR}{DH} = \frac{RS}{OD}, \quad \text{d'où} \quad \overline{OD}^2 = RS.DH.$$

OD et DH sont donc respectivement l'ordonnée et l'abscisse d'un point de la parabole $y^2 = RS.x$, où $y^2 = 2b(\tau - \alpha)x$.

La mesure du triangle UPQ sera donc fournie par l'abscisse de la parabole $\tau - \alpha$ qui correspond à l'ordonnée $OT = UP$. Si l'on diminue cette abscisse de la quantité f, c'est-à-dire si on la compte à partir de la verticale qui est à la distance f de OY, on a directement la mesure f_2 du profil proposé o PQ321.

On obtient de la même manière la mesure des autres profils, qui ne diffèrent du premier que par la position de la droite PQ.

On peut, à titre de vérification, déterminer directement sur la *fig.* 121 la mesure f_2 fournie par la réduction du quadrangle ABPQ. On procéderait exactement de la même manière si les profils en remblai précédemment considérés étaient remplacés par des profils en déblai, limités à leur partie inférieure pour le contour polygonal invariable $012345Q_1$. On prolongerait la droite $Q_1 5$ jusqu'à sa rencontre en U_1 avec la verticale du point o. L'aire constante à retrancher $U_1 543210$ serait immédiatement transformée en un triangle $A_1 B_1 U_1$, de hauteur $2b$ et de base $U_1 B_1 = 2f_1$. La ligne du terrain étant $P_1 Q_1$ pour l'un quelconque des nouveaux profils considérés, on opérerait sur le triangle $U_1 P_1 Q_1$ comme on a opéré précédemment sur le triangle UPQ.

IV. — Tables simplifiées.

184. Les tables paraboliques dont nous venons d'indiquer la construction peuvent, à raison de leur généralité, être employées avec quelque avantage pour la détermination des aires de déblai et de remblai circonscrites par des profils de types variés.

Mais, quand le projet comporte un profil constant, dont le type va se répétant, on a recours à des Tables d'une construction plus simple.

Considérons des profils qui ne diffèrent entre eux que par la cote de déblai ou de remblai sur l'axe et par l'inclinaison du terrain. Soient, comme précédemment, α (*fig.* 118) la tangente trigonométrique de l'angle compris entre l'horizontale et la ligne du terrain, τ la tangente de l'angle compris entre l'horizontale et la ligne du talus; soient, en outre, h la cote sur l'axe, c la hauteur constante qu'il faut ajouter à h pour avoir le segment intercepté sur l'axe par la ligne du terrain et par celle du talus, x la distance horizontale du point d'intersection de ces deux lignes à l'axe, c'est-à-dire la largeur d'emprise correspondant au demi-profil considéré. On a

$$(1) \qquad (\tau - \alpha).x = h + c.$$

Si l'on désigne par C l'aire complémentaire constante, tantôt positive, tantôt négative, qui est limitée par l'axe, par la plate-forme et par la ligne du talus prolongée, on a, comme expression de l'aire du profil,

$$(2) \qquad A = \frac{1}{2}(h + c)x - C,$$

ou

$$(3) \qquad A = \frac{1}{2}\frac{(h + c)^2}{\tau - \alpha} - C.$$

Si l'on prend comme abscisse variable $h + c$ et comme ordonnée la grandeur A, réduite à une base quelconque, le lieu des extrémités de cette ordonnée sera une parabole ayant pour axe celui des $h + c$ et pour paramètre une fonction de $\tau - \alpha$. On obtiendra donc des paraboles différentes, pour différentes valeurs de τ ou de α, à la condition toutefois que τ et α ne varient pas simultanément de telle sorte que leur différence soit constante.

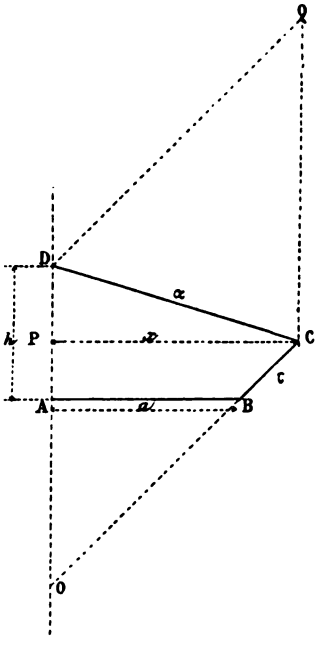
On retranche une fois pour toutes l'aire constante C en déplaçant de la quantité convenable l'axe des abscisses parallèlement à lui-même. Cette disposition est loin de présenter le caractère de généralité des Tables que nous avons décrites plus haut.

PENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE VII.

Formules générales pour le calcul des emprises et des aires de déblai et de remblai.

Désignons par α, τ, h et x les mêmes quantités que précédemment, demi-largeur de la plate-forme, et remplaçons, dans la relation (1)

Fig. 122.



84, c par sa valeur $a\tau$. Il vient, comme expression de la largeur se,

$$x = \frac{a\tau + h}{\tau - \alpha}.$$

Le demi-profil présentera l'une des six dispositions suivantes :

D*p*. Déblai et terrain en pente vers le talus (*fig.* 122).

D*r*. Déblai avec rampe.

DR*r*. Déblai au talus, remblai à l'axe, avec rampe.

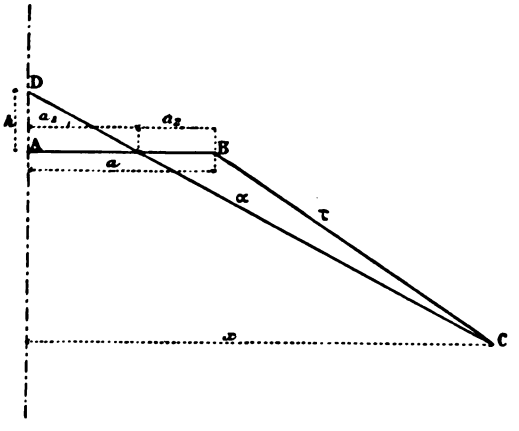
R*r*. Remblai et terrain en rampe vers le talus.

R*p*. Remblai avec pente (*fig.* 118).

RD*p*. Remblai aux talus, déblai à l'axe, avec pente (*fig.* 123).

En appliquant la règle des signes aux segments et aux angles, on voit qu'il suffit de changer le signe de α pour passer de D*p* à D*r* ou de R*r* à R*p*, et le signe de h pour passer de D*r* à DR*r* ou de R*p* à RD*p*. Le passage de

Fig. 123.



chacun des cas de gauche au cas correspondant de droite s'effectue par le changement simultané des signes de τ, de α et de h, ce qui revient à ne changer aucun de ces trois signes. Les six cas se trouvent donc compris dans l'expression générale

$$x = \frac{a\tau \pm h}{\tau \pm \alpha}. \tag{1}$$

On a le plus souvent, dans la pratique, $\tau = 1$ en déblai et $\tau = \frac{2}{3}$ en remblai. L'équation (1) devient alors :

Pour le déblai,

$$x = \frac{a}{1 \pm \alpha} \pm \frac{h}{1 \pm \alpha}; \tag{2}$$

Pour le remblai,

$$x = \frac{2a}{2 \pm 3\alpha} \pm \frac{3h}{2 \pm 3\alpha}. \tag{3}$$

186. Si, dans la relation (2) du n° 184, on remplace c et C par leurs valeurs respectives $a\tau$ et $\frac{a^2\tau}{2}$, on a, comme expression de l'aire du demi-profil,

$$(4) \qquad A = \frac{x}{2}h + \frac{a\tau}{2}(x - a).$$

Cette formule s'applique non seulement aux quatre types de profils non croisés (*fig.* 118 et 122), mais encore aux quadrilatères croisés ABCD des types DRr et RDp (*fig.* 123), pourvu qu'on tienne compte des conventions relatives aux signes des grandeurs rectilignes, angulaires et superficielles (81). Le circuit ABCD, considéré, par exemple, comme parcouru en sens positif dans les types Dp et Dr en déblai, limite des aires positives, déterminées dans l'équation (4) par des valeurs positives de h et de τ. Le même circuit ABCD, parcouru en sens opposé dans les types Rr et Rp en remblai, limite des aires négatives, déterminées par des valeurs négatives de h et de τ. Enfin, dans les deux types mixtes, le circuit et l'aire sont positifs en déblai, négatifs en remblai, ce qui est vérifié par τ positif et h négatif dans DRr, par τ négatif et h positif dans RDp. Dans chacun de ces deux cas, la valeur de A est positive ou négative, selon que la plus grande surface partielle est en déblai ou en remblai.

On étend donc la formule (4) à tous les cas en écrivant

$$(5) \qquad A = \pm\frac{x}{2}h \pm \frac{a\tau}{2}(x - a).$$

II. — Tableaux graphiques de M. Rouit [1].

187. Les formules (2) et (3) du n° 185 servent à construire des tableaux graphiques sur lesquels on détermine directement les largeurs d'emprises.

Prenons pour axes de coordonnées OX, OY (*fig.* 124) deux droites rectangulaires d'un réseau quadrillé dont l'interligne représente $1^m,00$ à l'échelle. Chacune des divisions déterminées par le quadrillé sur les axes porte un nombre qui exprime la distance en mètres (réduite à l'échelle) comprise entre la division correspondante et l'origine.

Si l'on pose dans la relation (2)

$$m = \frac{a}{1 \pm \alpha}, \quad n = \frac{h}{1 \pm \alpha},$$

---

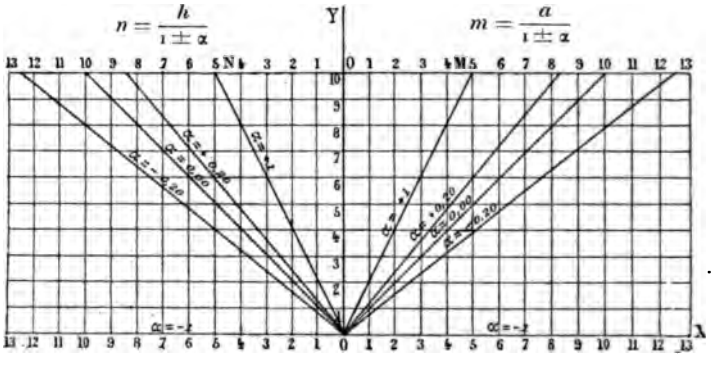
[1] *Nouveaux Tableaux graphiques donnant les largeurs d'emprise et les surfaces de déblai et de remblai des profils en travers*, par M. Rouit. Autographie, Bordeaux, 1877.

ces équations déterminent, pour chaque valeur particulière assignée à α, une même droite passant par l'origine et fournissent, pour la valeur de α considérée, les abscisses m, n qui correspondent respectivement aux ordonnées variables a et h. La largeur d'emprise x est égale à la somme ou à la différence de ces abscisses.

On convient que les ordonnées, toutes dirigées dans un sens positif, représentent les valeurs de a ou de h, selon qu'elles sont mesurées à droite ou à gauche de l'axe des y. On construit en conséquence, pour chaque valeur de α, deux droites, OM et ON, qui sont symétriques dans le cas particulier considéré, mais qui cessent de l'être lorsque τ n'est plus égal à l'unité. On mesure les abscisses m entre OY et OM et les abscisses n entre OY et ON.

Pour construire le double faisceau de droites OM, ON, on fait $a = h = 10$, et l'on attribue à α des valeurs variant de cinq en cinq centimètres. Pour $\alpha = +20$, on a, dans la formule (2), appliquée au cas Dp de la *fig.* 122,

Fig. 124.



$m = n = 8^m,333$. Pour la même déclivité prise en sens inverse (cas Dr), on a $m = n = 12^m,50$.

Si α prend successivement les valeurs ∞, $+1$, 0 et -1, c'est-à-dire si la ligne du terrain coupe celle du talus sous des angles de 135°, 90°, 45° et 0°, les droites OM et ON prennent des positions inclinées respectivement de 90°, 63° 26′, 45° et 0° sur l'horizontale.

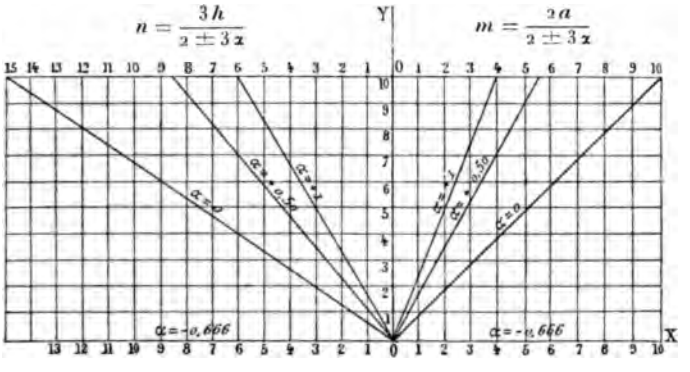
On déterminera, par exemple, la largeur d'emprise $x = 16^m,25$ d'un demi-profil Dp, dans lequel $a = 8^m,00$, $h = 5^m,00$, $\alpha = -0^m,20$, en mesurant sur l'horizontale 8, à droite, le segment de 10^m compris entre OY et $OM_{-0,20}$, et sur l'horizontale 5, à gauche, le segment de $6^m,25$ compris entre OY et $ON_{-0,20}$.

Dans le cas des profils en remblai (*fig.* 125) le faisceau O ne présente plus deux parties symétriques; car, pour des valeurs égales de a et de h, les valeurs de $m = \frac{2a}{2 \pm 3\alpha}$ et de $n = \frac{3h}{2 \pm 3\alpha}$ (formule 3) sont entre elles dans le rapport $\frac{2}{3}$.

Aux valeurs ∞, $+1$, $+0,50$, 0 et $-0,666$ de α, correspondent respectivement, sur l'horizontale 10, les valeurs 0, 4^m, $5^m.714$, 10^m, ∞ de m, et les valeurs $0,6$, $8^m.571$, $15^m,\infty$ de n.

188. L'un des avantages des tableaux étant de rendre inutile le dessin des profils, il faut pouvoir, à l'aide des seules données (α et h) particulières à chaque demi-profil, déterminer celui des six cas possibles dans lequel on se trouve. La distinction résulterait des signes de α et de h, si elle ne devait porter que sur les quatre cas de demi-profils entièrement

Fig. 125.



en déblai ou en remblai. Mais la déclivité et la cote rouge ont mêmes signes dans les types Dp et RDp, et mêmes signes, contraires aux précédents, dans les types Rr et DRr. Aussi faut-il, pour rendre la distinction immédiatement possible entre tous les types, pouvoir vérifier à vue si la distance $a_1 = \frac{h}{\alpha}$ de l'axe à l'intersection de la plate-forme et du talus (*fig.* 123) est plus grande que a, ce qui a lieu dans les cas Dp, Rr, ou plus petite que a, ce qui répond aux cas RDp, DRr.

On construit à cet effet un tableau auxiliaire dans lequel les ordonnées et les abscisses représentent respectivement les valeurs de h et de a. L'origine des coordonnées est alors le centre d'un faisceau de droites dont les inclinaisons correspondent aux diverses valeurs de α. On lit sur le tableau ainsi disposé les valeurs de $a_1 \gtrless a$ qui correspondent, pour chaque demi-

qui correspondent aux valeurs de a_2, rayons en traits pleins pour $\tau = 1$ et en traits pointillés pour $\tau = 0,666$.

Les divers tableaux que nous venons d'étudier s'appliquent à toutes les largeurs de plates-formes, à toutes les cotes sur l'axe, et à toutes les déclivités de terrains. On peut évidemment en tracer de pareils pour toutes autres inclinaisons de talus.

190. Le même auteur a proposé, pour la détermination graphique des largeurs d'emprises et des aires transversales, d'autres tableaux construits d'après les mêmes principes, mais qu'un choix différent de coordonnées a permis de disposer autrement.

Si dans la formule (1) on fait

$$\frac{1}{\tau \pm \alpha} = k,$$

il vient

$$x = a\tau k \pm hk;$$

si l'on pose

$$m = a\tau k, \quad n = hk$$

et qu'on porte, pour une valeur constante de τ, les valeurs de k en ordonnées, les valeurs de m en abscisses à droite et les valeurs de n en abscisses à gauche, on a, pour chaque valeur de a ou de h, l'équation d'une droite passant par l'origine. Sur chacune des droites ainsi déterminées est écrite la valeur de a ou de h qui lui correspond. Les horizontales du tableau portent, comme graduations, non les valeurs k de leurs ordonnées, mais les valeurs correspondantes de α. On dresse deux tableaux distincts, l'un pour $\tau = 1$, l'autre pour $\tau = 0,666$.

Ces tableaux des largeurs d'emprises nous paraissent mieux disposés que les précédents. Leur lecture est plus facile, et ils ont aussi l'avantage de substituer une seule série d'ordonnées k à la double série des ordonnées a et h.

Les tableaux pour les aires comportent des modifications analogues. On pose, comme précédemment dans (5),

$$p = \pm \frac{x}{2} h, \quad q = \pm \frac{a\tau}{2}(x - a).$$

Ayant assigné à τ une valeur constante, on porte les valeurs de x en ordonnées, les valeurs de p en abscisses à gauche, les valeurs de q en abscisses à droite. On a, pour chaque valeur de h, l'équation d'une droite passant par l'origine, et pour chaque valeur de a une équation de la forme

$$y = Ax + B,$$

qui est celle d'une droite ne passant plus par l'origine.

pointillées correspondant aux mêmes valeurs de $x - a$ coupent l'horizontale 10 à des distances du même axe qui sont les $\frac{2}{3}$ des précédentes.

Le tableau s'applique à tous les cas, pourvu qu'on tienne compte des signes. Toutefois, dans les demi-profils mixtes DR r et RDp, il ne fournit que les aires excédantes de déblai ou de remblai. Ces aires, seules utiles pour établir le mouvement des terres, ne suffiraient pas pour déterminer le cube total de la fouille. C'est pourquoi un dernier tableau est destiné à fournir les aires effectives de déblai et de remblai dans les demi-profils mixtes.

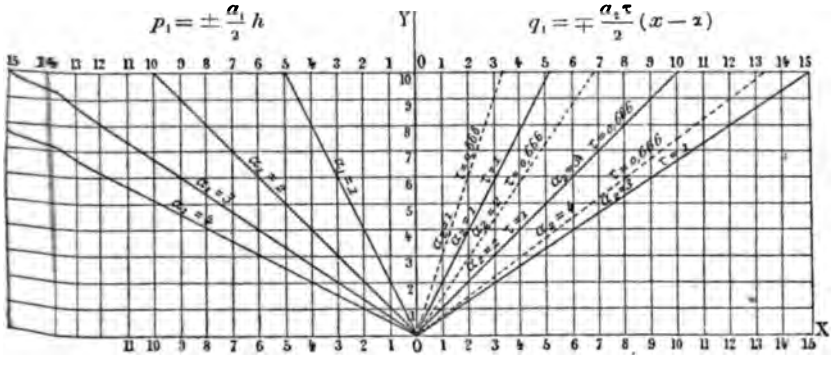
On remarque, à cet effet, que la valeur de A (équation 5) peut être mise sous la forme

$$(6) \qquad A = \pm \frac{a_1}{2} h \mp \frac{a_2 \tau}{2} (x - a),$$

qui ressort du simple examen de la *fig.* 123, et qu'on déduit d'ailleurs de la formule (5) en retranchant de chacun des deux termes du second membre l'aire commune $\frac{a_1 \tau}{2}(x - a)$.

Sous la nouvelle forme (6) les quantités

Fig. 127.



$$p_1 = \pm \frac{a_1}{2} h, \quad q_1 = \mp \frac{a_2 \tau}{2} (x - a)$$

sont, dans chacun des cas DR r, RDp, les aires mêmes de déblai et de remblai dont la somme algébrique est égale à A.

Dans le tableau (*fig.* 127), qui sert à déterminer séparément ces quantités, le côté gauche est réservé aux ordonnées h, aux abscisses p_1 et aux rayons issus de l'origine qui correspondent aux valeurs de a_1. On lit, au contraire, du côté droit, les ordonnées $x - a$, les abscisses q_1 et les rayons

haut, montre que les largeurs d'emprises x seront données par les mêmes droites que les aires, si les ordonnées à l'origine sont les mêmes dans les deux cas, c'est-à-dire si à la relation $\alpha'' = \frac{\alpha'}{2}$ on ajoute cette autre condition

$$\frac{1}{2}\log 2\left(A + \frac{a^2\tau}{2}\right) = \log x$$

ou

$$2\left(A + \frac{a^2\tau}{2}\right) = x^2.$$

Si l'on préfère ne pas lire les aires et les emprises sur le même système de droites, on pourra, par exemple, dresser l'abaque de telle sorte que les aires soient lues sur les droites à 2 de base pour 1 de hauteur, représentées par l'équation (m) et les largeurs sur les droites à 45° représentées par l'équation (n). C'est le cas d'un tableau dressé par M. Lalanne en 1850 (1).

192. On peut aussi, selon la disposition plus récemment adoptée par le même auteur (2), faire que, les déclivités α étant lues sur les horizontales du tableau et les cotes h sur des obliques à 45° (pente de gauche à droite), les aires soient données par les verticales du tableau et les largeurs d'emprises par des obliques à 45° (pente de droite à gauche).

Ces mêmes obliques donnent en outre, au moyen d'une seconde échelle, accolée à celle des emprises, les longueurs t des talus, exprimées par la relation

$$t = (x - a)\sqrt{1 + \tau^2} = \frac{\pm h \pm a\alpha}{\tau \pm \alpha}\sqrt{1 + \tau^2}.$$

Un premier tableau à quatre systèmes de droites cotées, disposé comme il vient d'être dit, se rapporte aux deux cas de Dp et Dr (185) d'un demi-profil en déblai avec pente ou avec rampe. Un second tableau, analogue au précédent, permet de résoudre les cas Rr et Rp.

Quand le demi-profil est mixte (RDp ou DRr), il n'y a pas lieu de chercher l'anamorphose des tables qui doivent donner simultanément les deux

---

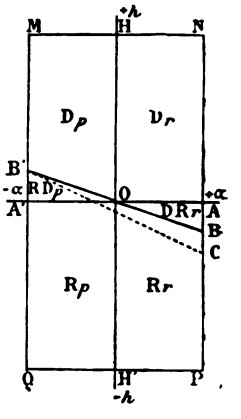
(1) Voir LALANNE, *Mémoire sur les Tables graphiques*, etc., Paris, 1846, et *Examen critique d'un Tableau graphique publié par M. Davaine et nouvelles applications de Géométrie anamorphique*. Paris, 1850.

(2) *Instruction pratique sur l'usage des Tableaux graphiques*, suivie de la *Collection de huit Tableaux graphiques pour la détermination des superficies de déblai et de remblai des profils en travers, des largeurs d'emprises et des longueurs de talus*. Paris, juin 1879.

aires partielles, car la graduation des axes de coordonnées qui conviendrait pour l'une ne conviendrait pas pour l'autre. On a dressé pour ces derniers cas, beaucoup moins fréquents que les quatre autres, des tableaux spéciaux, avec graduations en parties égales et courbes de niveau non déformées. Deux tableaux triangulaires de cette sorte fournissent les aires de déblai et de remblai du demi-profil, l'un dans le cas DR r, l'autre dans le cas RDp.

Chacun de ces tableaux présente deux systèmes de courbes paraboliques. Celles du premier système, tracées en traits pleins, portent à côté de leur cote la lettre D (déblai). Celles du second système, tracées en traits interrompus, sont marquées R (remblai). Le point de rencontre de l'horizontale qui correspond à une cote donnée h et de la verticale qui correspond à une déclivité donnée α, se trouve compris entre deux courbes D consécutives et entre deux courbes R consécutives. Les cotes des deux premières courbes donnent, par une interpolation à vue, l'aire partielle en déblai; les cotes des deux autres donnent l'aire en remblai.

Fig. 128.



Dans deux autres tableaux triangulaires, disposés aussi respectivement pour les cas RDp, DR r, le point commun à l'horizontale de la cote sur l'axe et à la verticale de la déclivité est compris entre deux droites cotées appartenant au faisceau de droites concourantes déterminées par l'équation des emprises. La cote de ce point, évaluée à vue, donne la largeur d'emprise cherchée. Une double échelle, placée à la base de chaque tableau, permet de lire immédiatement la longueur du talus $t = (x - a)\sqrt{1 + \tau^2}$ qui correspond à l'emprise x.

193. Les six tableaux dont nous venons de parler ne sont évidemment que les parties découpées et transformées de l'abaque complet auquel on a été conduit par la traduction graphique de la formule générale (191) qui comprend tous les cas. La *fig.* 128 représente le cadre de l'abaque primitif et des six parties qui le composent [1].

---

[1] L'idée de ce diagramme de répartition a été énoncée par M. Lalanne dans les *Tables* (numériques) *nouvelles pour abréger divers calculs relatifs aux projets de routes*, etc. Paris, 1839. (Voir *Annales des Ponts et Chaussées, lois et ordonnances*, 1840, p. 289). Mais c'est seulement dans l'*Appendice n° 4 au Cours de construction de Sganzin*, 1842, que l'auteur a considéré le plan du diagramme comme plan de projection des courbes paraboliques de niveau situées sur la surface des aires. En

Les rampes $(+\alpha)$ sont portées en abscisses dans le sens positif, jusqu'à la limite OA qu'on a jugée suffisante; les pentes $(-\alpha)$ sont portées dans

---

1843, après l'invention de l'*abaque* rectiligne, M. LALANNE a fait une première application du principe de l'anamorphose géométrique à la construction de Tableaux graphiques relatifs aux calculs des terrassements dans les chemins de fer à deux voies (Circulaire ministérielle du 2 septembre 1843, et *Instruction* à la suite, dans les *Annales des Ponts et Chaussées, lois et ordonnances*, 1843, p. 676). Ces Tableaux, et d'autres analogues dressés de 1844 à 1846 (*Mémoire sur les Tables graphiques*, etc., 1846), ne comprenaient encore, comme l'*abaque* lui-même, que trois cours de droites (horizontales, verticales et obliques à 45°, avec pente de gauche à droite).

L'ingénieur DAVAINE avait publié, en 1845, dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, un tableau graphique qui mérite d'être analysé, tant à raison de son originalité propre que pour les conséquences utiles de la polémique à laquelle cette publication donna lieu. DAVAINE avait remarqué que le triangle CDO (*fig.* 122), somme de l'aire à déterminer et du triangle constant ABO, est la moitié du parallélogramme CODQ. Se fondant sur cette propriété connue (G. 140), que les parallèles aux asymptotes d'une hyperbole, menées par un point quelconque de la courbe, forment avec les asymptotes un parallélogramme d'aire constante, DAVAINE avait considéré les droites CO, CQ, qui se coupent sous l'angle constant du talus et de la verticale, comme les asymptotes communes à une suite d'hyperboles homothétiques. Ces courbes étaient tracées sur une même table, et chacune d'elles portait une cote égale à la différence entre la moitié de l'aire constante du parallélogramme correspondant et l'aire constante du triangle ABO. En d'autres termes, l'hyperbole passant par le point D avait pour cote l'aire $A = \frac{CO \times CQ}{2\sqrt{1+\tau^2}}$ du demi-profil ABCD. Le point D était déterminé, dans chaque cas, par la droite CD, menée de l'origine avec l'inclinaison α, et par la droite QD menée du point Q, tel que $CQ = OD$, avec l'inclinaison τ. On entrait donc dans cette Table, comme dans les précédentes, par la cote sur l'axe et par la déclivité. La largeur d'emprise $CP = \frac{CO}{\sqrt{1+\tau^2}}$, projection horizontale de l'abscisse du point D, était aussi donnée par la simple lecture des nombres marqués sur les divisions de l'axe CO. L'usage de la Table pouvait être étendu à diverses largeurs de plate-forme, pourvu que l'inclinaison du talus restât constante, et que les chiffres de graduation des ordonnées et des courbes fussent, pour chaque nouvelle largeur, augmentés ou diminués d'une quantité constante. Mais le tracé des courbes présentait des difficultés; l'obliquité de leurs intersections avec les droites QD rendait les lectures difficiles dans certaines parties de la figure : l'usage de la Table dans les cas RDp et DRr exigeait qu'on eût recours à des constructions supplémentaires et à des calculs; enfin, l'inventeur avait cru à tort que la Table dressée pour un certain talus servirait pour un talus différent, sans qu'il fût nécessaire de changer les inclinaisons et les cotes des droites CD. M. LALANNE, après avoir signalé ces divers inconvénients (*Examen critique*, etc., Paris, 1850), a soumis la Table de DAVAINE à deux anamorphoses successives. La première a donné des axes rectangulaires et des hyperboles équilatères; la seconde a transformé ces hyperboles en droites parallèles, inclinées à 45° de gauche à droite, et les droites convergentes CD en droites perpendiculaires aux précédentes. (Voir le Tableau résultant de cette transformation dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1850, 1er sem., pl. CLXXVI). Les inconvénients de la Table DAVAINE étaient ainsi supprimés et, d'autre part, l'*abaque* et les

le sens négatif OA'. Les cotes sur l'axe h fournissent des ordonnées positives OH pour le déblai, et des ordonnées négatives OH' pour le remblai.

---

tableaux du 1843 se trouvaient très heureusement complétés par l'adjonction d'un second cours d'obliques parallèles. (*Notice sur les procédés de calcul employés par les ingénieurs anglais pour la rédaction des projets de chemins de fer, avec un tableau graphique*, etc., 1851. — *Tables graphiques* dressées en 1852 et en 1854 pour les compagnies des chemins de fer du Nord et de l'Est. — *Instruction pratique*, etc., avec la *Collection de huit Tableaux graphiques*, etc., juin 1879. — *Quatre Tableaux pour deux profils spéciaux des chemins de fer corses*, 1880).

Les *Annales des Ponts et Chaussées* (1879, 2e sem., p. 95) contiennent un *Rapport* de M. DE FOURCY, *sur la comparaison faite par M. Ricour de diverses méthodes employées pour la détermination des aires des profils en travers, des emprises et des talus.* L'étude comparative porte sur les Tableaux anamorphiques de 1843 et sur de nouvelles Tables proposées par M. WOYCIECHOWSKI. La conclusion de M. RICOUR est que la méthode LALANNE offre le double avantage de donner en moins de temps des résultats plus exacts et de ne pas exiger le tracé des profils en travers. Cette conclusion se rapporte au cas où la pente transversale du terrain peut être considérée comme uniforme. La méthode de M. WOYCIECHOWSKI mérite, au contraire, d'être recommandée, lorsque le profil du terrain est une ligne brisée. Cette méthode, dite de la *ligne compensatrice*, a été l'objet de deux publications successives : l'une dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 5e série, 1874, 2e sem., p. 192 (*Note sur une méthode nouvelle pour le calcul des aires de déblai et de remblai dans les profils en travers, proposée par M. Woyciechowski*, etc.), l'autre, beaucoup plus étendue, dans les *Annales industrielles* (livraisons des 6, 13, 20, 27 septembre, 4, 26 octobre et 15 novembre 1874, 26 septembre, 3 et 17 octobre 1875).

On trouve aussi, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1880, 2e sem., p. 303), une *Note* de M. H. WILLOTTE *sur la détermination, à l'aide de Tableaux graphiques, des surfaces des profils de terrassements.* Le Tableau de M. WILLOTTE n'est pas sans analogie avec celui de DAVAINE, bien qu'il soit déduit, comme cas particulier, de considérations beaucoup plus générales. Il se compose, en effet, d'hyperboles homothétiques, qui ont pour asymptotes la ligne du talus OC et l'axe du profil OD (*fig.* 122). Chacune de ces courbes est l'enveloppe des droites CD qui découpent dans le demi-profil des aires équivalentes à une aire donnée. Les valeurs des aires sont inscrites comme cotes sur les courbes correspondantes. On réduit le Tableau à d'étroites limites en ne traçant de chaque courbe que le petit segment qui enveloppe des droites CD de déclivité pratique. Ce Tableau invariable étant gravé d'avance sur un nombre suffisant de feuilles, en même temps que le gabarit du demi-profil, on trace sur chacune de ces feuilles plusieurs positions de la ligne CD déterminées par les cotes h et les déclivités α d'autant de profils en travers consécutifs. Ce tracé est facilité par une échelle linéaire placée sur l'axe et par une échelle angulaire, formée d'un faisceau concentrique dont chaque rayon a pour cote sa déclivité. Ce faisceau étant gravé sur la feuille, à proximité du Tableau, on trace chaque droite CD en menant à l'équerre, par le point de l'axe coté h, une parallèle au rayon du faisceau coté α. La droite CD est, d'après la construction, tangente, soit à l'une des hyperboles tracées, soit à une courbe intermédiaire. On lit directement, dans le premier cas, et par interpolation à vue dans le second, la cote de la courbe, c'est-à-dire l'aire du profil. La largeur d'emprise et la longueur du talus sont lues sur deux échelles placées à droite et à gauche de OC.

Dans une *Note sur la généralisation des Tableaux construits d'après la méthode de*

Le rectangle MNPQ, dont le plan est supposé horizontal, contient donc les pieds de toutes les ordonnées verticales qui représentent les valeurs des aires A correspondant aux valeurs de h comprises entre O et $\pm$ OH et aux valeurs de α comprises entre O et $\pm$ OA. Les sommets de ces ordonnées forment la limite superficielle du stéréogramme des aires dont les sections planes horizontales, projetées sur MNPQ, donneraient l'abaque à courbes paraboliques.

On voit immédiatement que les rectangles partiels

$$\left.\begin{array}{l}\text{ON}\\ \text{OP}\\ \text{OM}\\ \text{OQ}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{donnent respectivement les solutions}\\ \text{qui conviennent aux cas.....}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{D}r,\\ \text{R}r \text{ et DR}r,\\ \text{D}p \text{ et RD}p,\\ \text{R}p.\end{array}\right.$$

Il reste à décomposer le rectangle OP en deux parties, correspondant respectivement aux cas Rr et DRr et le rectangle OM en deux parties, correspondant aux cas Dp et RDp. Or il est aisé de vérifier que si d est la distance de l'axe au point de rencontre de la plate-forme et de la ligne du terrain, on a $h \lesseqgtr x\alpha$, selon que $d \lesseqgtr a$.

La première condition correspond aux cas DRr et RDp, et la dernière aux cas Rr et Dp; d'où il suit que la droite BB', représentée par l'équation $h = x\alpha$, sépare les trapèzes OBPH' et OB'MH, correspondant respectivement à Rr et à Dp, des triangles OAB et OA'B', correspondant à DRr et RDp. On a ainsi les gabarits primitifs des six tableaux que nous avons précédemment décrits. Les quatre premiers, rectangulaires ou trapézoïdaux,

---

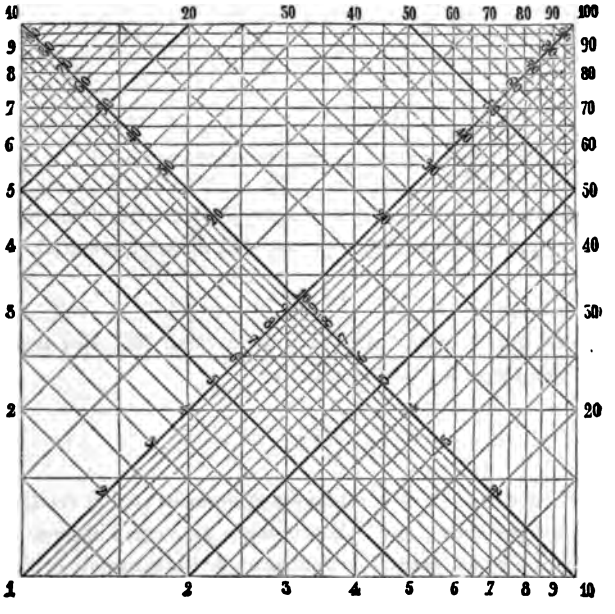
M. Willotte (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1882, 2e sem., p. 90), M. Dubret propose l'emploi d'un rapporteur trapézoïdal transparent, sur lequel on a tracé, une fois pour toutes, le faisceau de droites figurant les diverses inclinaisons du terrain. La grande base du trapèze, sur laquelle ces inclinaisons sont cotées, glisse comme le bord d'une équerre sur une règle dont le bord coïncide avec l'axe coté du demi-profil. On arrête le rapporteur dans la position qui fait passer la droite d'inclinaison α par le point de l'axe coté h et on lit, à travers le transparent, la cote de la courbe tangente à cette droite, sans avoir besoin de tracer la ligne CD. On peut ainsi n'avoir que deux Tableaux, l'un pour les déblais, l'autre pour les remblais. M. Dubret indique, en outre, certaines dispositions qui permettraient d'étendre l'emploi du procédé à d'autres largeurs de plate-forme, et de déterminer les aires des profils mixtes par un simple déplacement du rapporteur. Il convient de rappeler à ce propos que Cousinery avait donné, en 1839, dans le *Calcul par le Trait*, la description d'une règle transparente, au moyen de laquelle on peut obtenir, par une mesure linéaire, la superficie d'un triangle ou d'un quadrilatère.

Voir enfin, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1884, 1er sem., p. 211, une *Note* de M. Switkowski *Sur un procédé* (graphique) *de détermination expéditive des surfaces, emprises et talus des profils de terrassements.*

ont subi la transformation anamorphique; les deux derniers, triangulaires, ont donné les tableaux supplémentaires à courbes non transformées [1].

194. Nous avons dit plus haut comment l'*abaque* primitif et les tableaux graphiques pour le calcul des terrassements avaient été complétés par l'introduction d'un second cours d'obliques à 45°. Le nouvel *abaque complet*, dont la *fig.* 129 présente une réduction, permet de suppléer à l'insuffisance des tableaux construits en vue de gabarits spéciaux. Il peut arriver, par exemple, que la forme ou la nature du terrain conduise à adopter exceptionnellement des longueurs de plate-forme ou des déclivités de talus qui

Fig. 129.



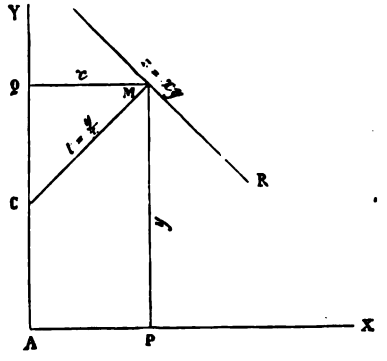
s'écartent des types courants. La construction de tableaux adaptés à ces

---

[1] Dans l'*Appendice* n° 4, t. I, *du Cours de construction de Sganzin*, M. Lalanne avait été conduit, par la considération des fossés latéraux, à neuf types de demi-profils et à neuf formules distinctes, qui déterminaient la décomposition du rectangle MNPQ en neuf figures, au lieu de six. Les trois figures supplémentaires étaient déterminées par une droite B'C, représentée par l'équation $h = a'\alpha - p$, dans laquelle a' est la distance de l'axe au pied du talus extérieur du fossé et p la profondeur du même fossé. Cette droite détachait un triangle de RDp, un triangle de Rp et un trapèze de Rr. On avait de la sorte, au-dessous de BB', six régions qui se réduisent à trois quand on cesse d'introduire les fossés.

cas particuliers n'étant pas justifiée par l'application qu'on en pourrait faire à un trop petit nombre de profils, il est plus pratique de déterminer les aires au moyen de l'abaque complet. On remarque en effet que, grâce à la graduation logarithmique des bords du cadre et des diagonales, la cote z de l'oblique MR (*fig.* 130) qui passe par le point M de la verticale

Fig. 130.



PM et de l'horizontale QM, menées respectivement à des distances de l'origine exprimées par $AP = x$, $AQ = y$, satisfait numériquement à la relation

$$(1) \qquad z = xy.$$

On voit aussi que la cote t de l'oblique inverse MC, qui passe par le point M, est liée à x et à y par la relation

$$(2) \qquad t = \frac{x}{y}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{x^2}{t}.$$

Or les aires de déblai et de remblai étant données par la relation (k) du n° 191, il suffira de suivre sur l'abaque de la *fig.* 129 l'oblique de direction MR cotée $2(\tau \pm \alpha)$, jusqu'à la rencontre de l'horizontale cotée $a\tau \pm h$, pour lire la valeur de $\frac{(a\tau \pm h)^2}{2(\tau \pm \alpha)}$ sur l'oblique inverse de direction MC qui passe par le point de rencontre. Retranchant la constante $C = \frac{a^2\tau}{2}$, on aura l'aire cherchée A [1].

---

[1] L'*abaque complet* permet, en général, de déterminer, au moyen des relations (1) et (2) ci-dessus, deux quelconques des quatre quantités x, y, z, t, en fonctions des deux autres. Il en résulte, pour chacune des quatre quantités, trois expressions différentes, qui correspondent à sept opérations distinctes. Chacune de ces opérations n'exige que la lecture d'une cote relative aux deux données de la question.

IV. — Profilomètre de M. Siégler [1].

195. Si, dans la relation (k) du n° **191**, on fait

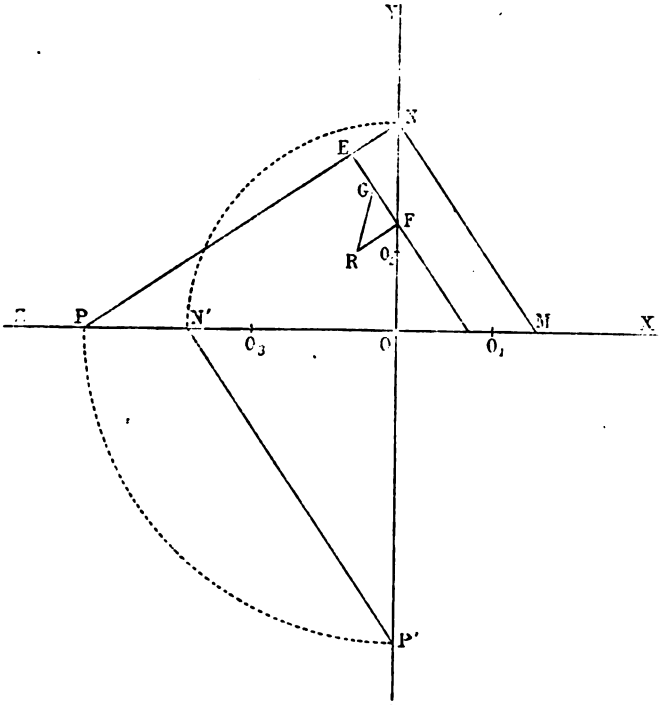
$$(1)\qquad 2(\tau \pm \alpha) = x, \quad a\tau \pm h = y, \quad A + \frac{a^2\tau}{2} = z,$$

on a

$$(2)\qquad z = \frac{y^2}{x}.$$

Sur les directions OX, OY, OZ de deux axes rectangulaires (*fig.* 131)

Fig. 131.



on marque respectivement des suites de points M, N, P, dont les distances

---

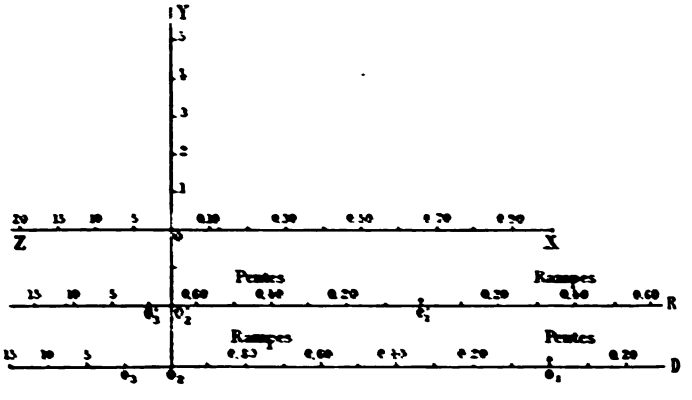
[1] Voir Siégler, *Note sur un procédé rapide de détermination des surfaces de profils en travers*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*. Paris, 1881, 1er sem., p. 98.— Léon Durand-Claye, *Note sur l'évaluation des surfaces de déblai et de remblai, d'après les indications de M. d'Ocagne*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*. Paris, 1883, 1er sem., p. 402.

à l'origine représentent, à l'échelle adoptée, des suites de valeurs des variables x, y, z. On inscrit aux points de division M, N, P, non les valeurs de x, y, z qui les déterminent graphiquement, mais les valeurs numériques respectivement correspondantes des variables a, h, A, déduites des trois équations (1). On obtient la valeur OP de z et, conséquemment, la valeur de l'aire A qui correspond à $x = \mathrm{OM}$, $y = \mathrm{ON}$, en plaçant au point N le sommet d'une équerre MNP, dont l'un des côtés coïncide avec MN. On a en effet

$$\mathrm{OP} = \frac{\overline{\mathrm{ON}}^2}{\mathrm{OM}} = \frac{y^2}{x}.$$

Les quantités 2τ, $a\tau$, $\frac{a^2\tau}{2}$ étant constantes lorsque tous les profils ont même largeur de plate-forme et même inclinaison de talus, on arrive aux mêmes graduations des axes en déterminant d'abord les points O_1, O_2, O_3, tels que $OO_1 = 2\tau$, $OO_2 = a\tau$, $OO_3 = \frac{a^2\tau}{2}$ et en prenant ensuite les sommets du triangle des constantes, $O_1O_2O_3$, comme origines respectives des valeurs

Fig. 132.



de $2a$, h et A. L'aire cherchée, $A = O_3P$, est alors directement donnée par la figure.

τ varie ordinairement quand on passe du déblai au remblai. Si donc OO_2 représente la constante $a\tau$ dans le premier cas, un autre segment OO'_2 la représentera dans le second cas. On mène en conséquence, par le point O_2, parallèlement à ZX (fig. 132), un second axe O_2D sur lequel on porte,

en même temps que les origines O_1, O_3, les graduations de 2α et de A qui correspondent aux demi-profils entièrement en déblais. Ce second axe sert à déterminer les aires dans les cas D_p et D_r (185).

De même, un troisième axe O'_2R, mené par le point O'_2 parallèlement à ZX, porte les origines O'_1, O'_3 et les graduations de 2α et de A dans les cas Rr et Rp des demi-profils en remblai.

Quant au cas DRr et RDp des profils mixtes, on observe que, pour l'aire de remblai à l'axe dans le premier et pour l'aire de déblai à l'axe dans le second, la relation (k) se réduit à

$$A_1 = \frac{h^2}{\pm 2\alpha}.$$

Les constantes sont par conséquent nulles et les trois origines O_1, O_2, O_3 se confondent avec l'origine primitive O, située sur l'axe ZX qui sert à déterminer, dans l'un ou l'autre cas, les aires partielles A_1. On déterminera enfin sur l'axe O_2D l'aire de déblai au talus dans le cas de DRr, et sur l'axe O'_2D l'aire de remblai au talus dans le cas RDp.

Cette distribution des échelles et des origines entre trois axes horizontaux a permis de porter les aires et les cotes sur l'axe dans les mêmes directions respectives, contrairement à la convention sur les signes des segments. Quant aux déclivités, on les porte sur l'axe D, à partir de l'origine O_1, à gauche pour les rampes, à droite pour les pentes, et inversement sur l'axe R, à partir de l'origine O'_1, à gauche pour les pentes, à droite pour les rampes. La graduation unique de ZX, dans la direction OX, marque des pentes ou des rampes selon que l'échelle tracée sur le même axe, dans la direction OZ, marque des aires de déblai (cas RDp) ou de remblai (cas DRr).

L'épure est d'un usage plus facile quand on adopte des échelles différentes pour chacune des trois variables x, y, z; mais, pour que la déformation qui en résulte n'altère pas les rapports graphiques sur lesquels le procédé repose, il faut que les trois échelles soient liées entre elles par la relation (2) qui existe entre les trois variables. Pour étendre l'usage de l'épure à un autre type de profils, il faudrait tracer deux nouveaux axes horizontaux dont les distances OO_2, OO'_2 à l'origine primitive seraient données par les constantes a et τ du nouveau type. Il est d'ailleurs évident que la relation graphique établie par le triangle rectangle MNP entre les trois variables α, h et A permet de déterminer l'une quelconque de ces quantités en fonction des deux autres. On pourra, par exemple, transformer un profil donné d'aire A en un autre équivalent, étant donnée la déclivité α ou la cote h du nouveau profil.

196. L'un des avantages de la méthode étant de n'avoir pas à dessiner les profils, il faut que la demi-largeur d'emprise puisse être aussi mesurée sur l'épure.

Cette demi-largeur a pour expression (185) $e = \frac{a\tau \pm h}{\tau \pm \alpha}$, et, d'après les relations (1) du n° 195, on a (*fig.* 131)

$$\frac{a\tau \pm h}{\tau \pm \alpha} = 2\frac{y}{x} = 2\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}} = 2\,\mathrm{tang}\,\widehat{\mathrm{OMN}} = 2\,\mathrm{tang}\,\widehat{\mathrm{ONP}} = \mathrm{EF},$$

F étant l'intersection de ON et de la parallèle à MN menée à la distance $\mathrm{NE} = 2$.

On lira donc e sur l'échelle EF, convenablement graduée, d'une équerre transparente ou évidée. On remplace ordinairement cette échelle par une autre, inclinée à 45° sur les côtés de l'équerre.

On pourra mesurer la longueur l du talus en menant par le point F la parallèle à NP jusqu'à la rencontre en R de la droite invariable GR, déterminée par la double condition que $\mathrm{GE} = a$ et que $\tau = \mathrm{tang}\,\widehat{\mathrm{FGR}}$.

On a, en effet,

$$\mathrm{GR} = (e - a)\sqrt{1 + \tau^2} = l.$$

197. L'inconvénient de la disposition précédente consiste dans la difficulté de placer bien exactement le sommet de l'équerre au point N. On obtient des résultats plus approchés en substituant, comme l'a proposé M. d'Ocagne, la parallèle N′P′ à la perpendiculaire NP. L'échelle des z est alors reportée en prolongement de OY, suivant OP′, et l'on répète à sa place l'échelle des y sur OP. Si, dans ces conditions, on fait glisser l'un des bords d'une équerre ordinaire de la position MN, résultant des données α et h, à la position parallèle N′P′, telle que $\mathrm{ON}' = \mathrm{ON}$, on a immédiatement

$$\mathrm{OP}' = \frac{\mathrm{ON}'.\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}} = \frac{y^2}{x} = z,$$

en sorte que la valeur de z est donnée par la cote de graduation du point P′.

CHAPITRE VIII.

OPÉRATIONS GRAPHIQUES SUR LES AIRES (1).

EUCLIDIS, *Quæ supersunt omnia*, Oxoniæ, MDCCIII, p. 667-684. — LEONARDO PISANO, *Practica Geometriæ*, Roma, 1862, p. 110-148. — K. VON OTT, *Das graphische Rechnen und die graphische Statik*. Vierte Auflage. Erster Theil. Prag, 1879, § 11-13. — J. WENCK, *Die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf die Geometrie*, Berlin, 1879, VII-IX Abschn.

I. — Position du problème.

198. On a vu que les opérations à effectuer sur les aires comportent des réductions préalables qui permettent de substituer à ces aires des segments de droites (87). Mais quand il s'agit de re-

(1) PROCLUS, dans son Commentaire sur le premier livre des *Éléments* (PROCLI DIADOCHI LYCII, etc. *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarium*, etc., a FRANCISCO BAROCIO, etc. Patavii, 1560, p. 40), cite, parmi les écrits mathématiques d'EUCLIDE parvenus jusqu'à lui, un Traité de la division des aires : *Itemque de divisionibus liber*. Il ajoute, à propos d'une question spéciale traitée dans ce livre : « Circulus namque et rectilineorum quodlibet in ratione dissimiles dividi potest figuras. Quod et ipse Euclides in divisionibus pertractat, aliam quidem figurarum in similes datas figuras, aliam vero in dissimiles dividens. » D'après PROCLUS, le livre d'EUCLIDE avait pour titre : Περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Ces indications, et quelques autres observations du même commentateur, permettent de penser que le *Traité de la division des aires* était composé d'une suite de problèmes recueillis pour servir d'exercices aux élèves du Géomètre grec et pour être mis en pratique dans les applications de la Géométrie. Après PROCLUS, le livre d'EUCLIDE tomba pour longtemps en oubli, et c'est seulement dans la seconde moitié du XVIe siècle que l'attention des géomètres d'Occident fut ramenée sur un sujet dont les origines sont si anciennes. Les questions traitées dans le Livre de *la division des aires* furent cependant connues en Italie au commencement du XIIIe siècle. On en trouve des traces évidentes dans la *Practica Geometriæ* de LÉONARD DE PISE. On sait, du reste, que ce savant puisa sa culture mathématique aux sources arabes, et c'est précisément aux Arabes que nous devons tout ce qui a pu être retrouvé de l'ancien Traité grec. Ce Traité fut mentionné pour la première fois en Occident, vers 1570. JOHN DEE venait de découvrir un petit livre sur *la division des aires* qui portait en tête le nom de MAHOMET BAGDADIN, géomètre du

présenter, au moyen de certaines figures déterminées, les sommes, les différences, les multiples ou les sous-multiples d'aires données,

---

xe siècle. Il en publia, avec la collaboration de FEDERICO COMMANDINO, une traduction latine, précédée d'une Introduction dans laquelle il exprimait certains doutes sur le point de savoir si le Traité attribué à BAGDADIN n'était pas précisément le Περὶ διαιρέσεων βιβλίον d'EUCLIDE. FEDERICO COMMANDINO ajouta à la traduction en la publiant, ainsi qu'il résulte du titre même : *De superficierum divisionibus liber Mahometo Bagdedino ascriptus nunc primum* JOANNIS DEE *Londinensis et* FEDERICI COMMANDINI *Urbinatis in lucem editus.* FEDERICI COMMANDINI *de eadem re libellus.* Pisauri, MDLXX. FULVIO VIANI traduisit le Traité en italien dans le courant de la même année.

DEE ne connaissait probablement pas le second passage de PROCLUS, cité plus haut, quand il publia le Traité qu'il avait eu la bonne fortune de découvrir. La connaissance de ce passage le fortifia plus tard dans l'opinion qu'il avait d'abord timidement exprimée, et il écrivit de sa main sur l'exemplaire de PROCLUS qu'il possédait et en regard du même passage : « Clarum hinc esse potest Librum illum, sive fragmentum, de Divisionibus superficierum, quem nos cum Mathematici excellentissimo D. Federico Commandino reliquimus, anno 1563 ipsius Euclidis fuisse; quod tum conjiciebamus quidem, aliis argumentis adducti, hujus loci immemores. »

Cette opinion de DEE ne fut pas admise sans contestation par les savants. Sir HENRY SAVILE (*Prælectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis Oxoniæ habitæ*, 1620, Oxoniæ, 1621, p. 17) allégua, pour la combattre, qu'on ne pouvait attribuer à EUCLIDE un Traité entaché de plusieurs inexactitudes et dans lequel ne figuraient pas les propositions mentionnées explicitement par PROCLUS comme se rapportant à la division du cercle et à celle des figures semblables ou dissemblables. En dépit de ces objections et de quelques autres, GREGORY inséra, dans son édition des OEuvres d'EUCLIDE, le Traité précédemment publié par DEE et par COMMANDIN (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ, *Euclidis quæ supersunt omnia.* Ex recensione DAVIDIS GREGORII, Oxoniæ, MDCCIII, p. 667-684). GREGORY écrivait à ce propos (*Op. cit.*, p. 10-11 de la Préface) : Quod et raro admodum reperitur, et Euclidem auctorem magis sapiat quam optica et catoptrica pro ejusdem Libris habitæ; » et il ajoutait : « illum latine tantum exhibemus : græce enim, quod sciamus, nullibi reperitur. »

Le Traité d'EUCLIDE sur la division des aires est tombé depuis dans un oubli presque complet. Les historiens des Mathématiques n'en ont parlé, jusqu'à ces derniers temps, que d'après les sources anciennes déjà citées et sans faire avancer la question par aucune recherche nouvelle. On trouve cependant, de loin en loin, dans les Traités de Géométrie plane et, plus particulièrement, dans les Traités de Géométrie pratique, quelques propositions évidemment empruntées au Livre plus ou moins authentique d'EUCLIDE. Ce n'est pas ici le lieu d'en suivre les traces par le menu, quelque intéressante d'ailleurs que puisse être cette recherche pour l'histoire de la Science. Nous préférons parler des travaux que FRANÇOIS WOEPCKE a publiés tout récemment sur le même sujet.

Ce savant, aussi profond orientaliste qu'habile mathématicien, a découvert dans le manuscrit n° 952, 2 (supplément arabe de la Bibliothèque Nationale), un fragment qui remonte à l'an 980 et qui contient une traduction du Traité d'EUCLIDE. Le géomètre grec y est explicitement désigné comme auteur de ce Traité [WOEPCKE, *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide; Journal asiatique*, 4e série, t. XVIII, p. 218, 219, 223-247. Paris, MDCCCLI]. Le fragment découvert par WOEPCKE diffère beaucoup de celui que DEE et COMMANDIN avaient antérieurement publié. Il ne

ou encore de diviser une aire suivant certaines règles indiquées, et de telle façon que les figures obtenues satisfassent à des conditions déterminées, on doit recourir à des procédés spéciaux, gé-

---

contient malheureusement, à quatre exceptions près, que les énoncés de trente-six propositions « dont les démonstrations sont faciles », fait observer, en terminant, l'auteur du manuscrit. Quelques-unes de ces propositions se rapportent au sujet que PROCLUS indiquait en ces termes : « Circulus namque et rectilineorum quodlibet in ratione dissimiles dividi potest figuras. » Nous avons vu que SAVILE se fonde sur ce qu'elles ne sont pas contenues dans la version DEE-COMMANDIN pour contester l'authenticité de cette version. WOEPCKE a trouvé depuis de nouveaux documents pour la restitution du Traité d'EUCLIDE dans un recueil de constructions géométriques d'ABOUL WEFA, qui fait partie du manuscrit persan n° 169 (Ancien fonds de la Bibliothèque Nationale). Quelques-unes de ces constructions, relatives à la division des figures planes, paraissent directement empruntées au géomètre grec (*Recherches sur l'histoire des Sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des Traités inédits arabes et persans. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques d'Aboûl Wefâ*, par M. F. WOEPCKE. Paris, MDCCCLV. Extrait n° 2 de l'année 1855 du *Journal asiatique*, p. 3, 60-82).

Peu de temps après cette découverte, la munificence du prince BALTHAZAR BONCOMPAGNI mettait à la disposition des savants l'ouvrage de LÉONARD DE PISE, dont nous avons déjà parlé incidemment (*Scritti di Leonardo, Pisano matematico del secolo decimoterzo, vol. II, Leonardi Pisani Practica Geometriæ et opusculi*. Roma, 1862, p. 110-148). Cet Ouvrage contient, sous le titre de *Distinctio quarta de divisione camporum inter consortes*, un exposé très complet de la division des figures planes, dont une partie au moins a été, sans aucun doute, puisée aux sources arabes. LUCA PACIOLI a très probablement fait usage des travaux de LÉONARD quand il a traité de questions analogues dans la *Distinctio quinta* de son *Tractatus Geometriæ*. Les OEuvres de LÉONARD DE PISE étant de publication récente, on s'explique aisément que son Traité n'ait pas été mentionné par les historiens des Mathématiques qui se sont occupés de la division des aires; mais il est plus difficile de comprendre que personne n'ait pensé au Traité de PACIOLI, dont deux éditions ont été publiées, l'une en 1494, l'autre en 1523.

Une restitution du livre d'EUCLIDE sur la division des figures planes a été tentée par le professeur L. F. OFTERDINGER (*Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euclides über die Theilung der Figuren*. Ulm, 1853.)

CHASLES écrit, à propos du Traité de MAHOMET BAGDADIN : « Nous sommes tout à fait porté à attribuer l'ouvrage à un géomètre grec, à EUCLIDE, si l'on veut (puisque PROCLUS cite de lui un Traité *de Divisionibus*); car il ressemble parfaitement par sa forme et par la pureté du style géométrique aux Ouvrages des Grecs, et nullement à ceux des Arabes, qui, alliant la science des premiers à celle des Hindous, avaient introduit le calcul algébrique dans leur Géométrie et démontraient leurs propositions les plus générales sur des données numériques, et non pas dans l'état de généralité et d'abstraction que présentent celles du Traité en question. Ajoutons que les Grecs avaient écrit sur la Géodésie dans les premiers temps de l'école d'Alexandrie, comme nous le voyons par un Ouvrage de HÉRON l'Ancien, mis au jour par M. VENTURI, et que, s'ils n'avaient pas eu leur Traité *De divisionibus superficierum*, c'eût été une lacune que ne peut faire supposer la perfection qu'ils donnaient à leurs Ouvrages. » (*Aperçu historique*, etc., Paris, 1875, p. 497.)

néralement assez simples, et qui reposent souvent sur la seule géométrie des anciens.

Nous nous bornons à résoudre quelques-uns des problèmes les plus généraux. On en déduira la marche à suivre dans un grand nombre de cas particuliers.

II. — Somme ou différence des aires.

199. *Construire un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.*

Soient a, b les côtés des carrés donnés, x le côté du carré équivalent à leur somme ou à leur différence. On a

$$x = \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

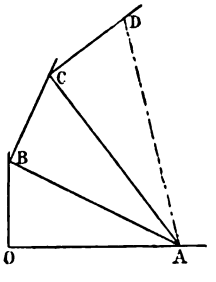
x est donc, selon qu'il s'agit de la somme ou de la différence, l'hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit a et b, ou l'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle dont a et b sont respectivement l'hypoténuse et le second côté.

200. *Construire un carré équivalant à la somme de plusieurs carrés donnés.*

Soient a, b, c, d, ... les côtés des carrés donnés, x le côté du carré cherché. On a

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots.$$

Fig. 133.



On construit successivement

$$y^2 = a^2 + b^2,$$
$$z^2 = y^2 + c^2,$$
$$w^2 = z^2 + d^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A cet effet, on élève (*fig.* 133) une perpendiculaire $OB = b$ à l'origine O d'un segment $OA = a$; on joint $BA = y$; on élève $BC = c$ perpendiculaire sur BA; on joint $CA = z$; on élève $CD = d$ perpendiculaire sur CA; on joint $DA = w$, et ainsi de suite. Si les données du

problème se trouvaient réduites aux quatre premiers carrés, le côté du carré équivalent à leur somme serait $w = x$ ou DA.

201. *Déterminer le rayon d'un cercle équivalent à la somme ou à la différence de deux cercles donnés.*

Soient r_1, r_2 les rayons des cercles donnés, x le rayon du cercle à déterminer. On a

$$\pi x^2 = \pi(r_1^2 \pm r_2^2),$$

et, par suite,

$$x = \sqrt{r_1^2 \pm r_2^2},$$

double formule dont nous venons d'indiquer la construction.

On détermine, par une construction analogue à celle du numéro précédent, le rayon d'un cercle équivalent à un nombre quelconque de cercles donnés.

202. *Construire sur une base donnée un rectangle équivalent à la somme ou à la différence de deux rectangles donnés.*

Soient h_1, h_2 les hauteurs des rectangles qu'on obtient en réduisant les rectangles donnés à la base donnée b (**89**). On a

$$bx = b(h_1 \pm h_2),$$
$$x = h_1 \pm h_2.$$

La construction ne présente pas plus de difficulté quand les rectangles donnés sont en nombre quelconque.

203. *Construire une ellipse équivalente à la somme ou à la différence de deux ellipses données.*

Soient a_1 et b_1, a_2 et b_2 les demi-axes des ellipses données, x et y les demi-axes de l'ellipse cherchée. Il s'agit de construire l'équation

$$\pi xy = \pi(a_1 b_1 \pm a_2 b_2)$$

ou

$$xy = a_1 b_1 \pm a_2 b_2,$$

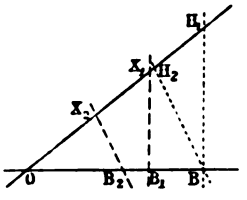
c'est-à-dire de déterminer les côtés d'un rectangle équivalent à la somme ou à la différence de deux autres. On procédera comme

au numéro précédent, après s'être donné arbitrairement l'un ou l'autre des demi-axes x et y.

204. *Construire sur une base donnée un triangle équivalent à la somme ou à la différence de deux triangles donnés.*

Soit b la base donnée et soient b_1, b_2 les bases, h_1, h_2 les hauteurs des triangles donnés. On transforme (87) ces triangles en deux autres équivalents, ayant pour base b. La hauteur du triangle à construire est égale à la somme ou à la différence, $x_1 \pm x_2$, des hauteurs des triangles transformés.

Fig. 134.



On effectue la construction de la manière suivante :

Sur l'un des côtés d'un angle quelconque O (*fig.* 134) on porte $OB = b$, $OB_1 = b_1$, $OB_2 = b_2$; sur l'autre côté du même angle on porte $OH_1 = h_1$, $OH_2 = h_2$. Les parallèles menées à BH_1 par le point B_1 et à BH_2 par le point B_2, coupent OH_1, respectivement, aux points X_1, X_2, et l'on a

$$OX_1 = x_1, \quad OX_2 = x_2.$$

La construction donne, en effet,

$$\frac{OB}{OH_1} = \frac{OB_1}{OX_1},$$

d'où

$$bx_1 = b_1 h_1$$

et

$$\frac{OB}{OH_2} = \frac{OB_2}{OX_2},$$

d'où

$$bx_2 = b_2 h_2.$$

Mais on doit avoir

$$bx = b_1 h_1 \pm b_2 h_2$$

et, par suite,

$$x = x_1 \pm x_2.$$

On construit avec la même facilité un triangle de base donnée, équivalent à la somme d'un nombre quelconque de triangles donnés.

205. Dans chacun des exemples qui précèdent, les aires données et celle qu'on détermine par voie d'addition ou de soustraction, sont de même forme géométrique; mais le procédé ne comporte aucune modification essentielle quand on se propose d'obtenir comme résultat une aire qui ne soit pas de même forme que les aires données. Lorsque les aires dont on cherche la somme ou la différence sont elles-mêmes des figures d'espèces diverses, on commence par transformer géométriquement une ou plusieurs de ces figures, de façon à les ramener toutes à une même forme. On opère ensuite suivant les règles précédemment exposées.

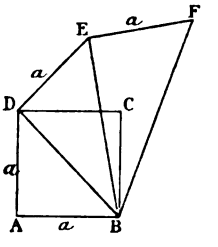
III. — Multiplication des aires.

206. *Construire un carré multiple d'un carré donné.*

Soit a le côté du carré donné, x le côté du carré cherché, n le multiplicateur. On a

$$x^2 = na^2.$$

Fig. 135.



DB (*fig.* 135) étant la diagonale du carré donné ABCD, on a

$$\overline{DB}^2 = 2a^2.$$

DE, EF, ... étant des segments de longueur a, respectivement perpendiculaires à DB, EB, ..., on a successivement

$$\overline{EB}^2 = 3a^2,$$
$$\overline{FB}^2 = 4a^2,$$
$$\dots\dots\dots,$$
$$x = \overline{NB}^2 = na^2.$$

207. *Construire un cercle multiple d'un cercle donné.*

r étant le rayon du cercle donné, x celui du cercle cherché, n le multiplicateur, on a

$$\pi x^2 = n\pi r^2,$$
$$x^2 = nr^2.$$

On est ainsi ramené à la construction précédente.

208. *Construire un rectangle de base donnée équivalent à un certain multiple d'un rectangle donné.*

Soient b et h la base et la hauteur du rectangle donné, b_1 et x la base et la hauteur du rectangle cherché. On a

$$b_1 x = n.bh = nb.h = b.nh;$$

d'où les proportions

$$\frac{b_1}{h} = \frac{nb}{x}, \quad \frac{b_1}{nh} = \frac{b}{x},$$

que l'on a appris à construire de diverses manières.

209. *Construire une ellipse, dont un demi-axe est donné, équivalente au multiple d'une ellipse donnée.*

Soient a et b les demi-axes de l'ellipse donnée, a_1 et x les demi-axes de l'ellipse cherchée. On a

$$\pi a_1 x = n\pi ab,$$
$$a_1 x = na.b = a.nb,$$

expression que l'on sait construire.

210. *Construire sur une base donnée un triangle équivalent à un multiple d'un triangle donné.*

Soient b et h la base et la hauteur du triangle donné, b_1 et x la base et la hauteur du triangle cherché. On a

$$\frac{b_1 x}{2} = n.\frac{bh}{2},$$
$$b_1 x = nb.h = b.nh.$$

211. *Construire une figure équivalente à un multiple d'un polygone régulier quelconque.*

On ramène ce cas au précédent par la transformation du polygone donné en un triangle équivalent.

212. *Construire une figure semblable à une figure donnée et équivalente à un multiple de celle-ci.*

Soient A_1 l'aire de la figure donnée, a_1 un côté, un rayon ou

un axe de cette figure, A_2 l'aire, double de A_1, d'une figure semblable à A_1, a_2 le côté, le rayon ou l'axe de A_2, homologue à a_1.

Les aires des figures semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, on a

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2} = \frac{a_1^2}{a_2^2};$$

d'où

$$a_2^2 = 2a_1^2.$$

Soient $A_3 = 3A_1$ une nouvelle figure semblable à A_1, et a_3 le côté de A_3 homologue à a_1. On a de même

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{1}{3} = \frac{a_1^2}{a_3^2};$$

d'où

$$a_3^2 = 3a_1^2.$$

En général, a_n étant l'homologue de a_1 dans une figure $A_n = nA_1$, on a

$$a_n^2 = na_1^2.$$

On déterminera successivement $a_2, a_3, \ldots, a_n$ par le procédé graphique du n° 206.

IV. — Division des aires.

213. *Diviser l'aire d'un triangle, au moyen de rayons issus d'un sommet, en un nombre quelconque de parties qui soient entre elles dans des rapports donnés.*

Fig. 136.

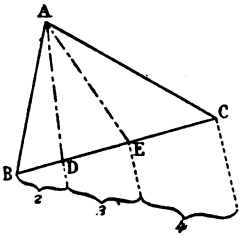
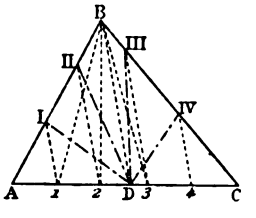


Fig. 137.



Soit, par exemple, à diviser, au moyen de rayons issus du sommet A (*fig.* 136), le triangle ABC en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2, 3 et 4. Il suffira de joindre le som-

met A aux points D et E qui divisent la base opposée BC dans les mêmes rapports.

214. *Diviser l'aire d'un triangle en un nombre quelconque de parties équivalentes, au moyen de rayons issus d'un point du périmètre.*

Soit D (*fig.* 137) le centre du faisceau qui doit diviser le triangle ABC en cinq parties équivalentes. On divise en cinq parties égales le côté AC, qui contient D, et par les points de division on mène les parallèles 1I, 2II, 3III, 4IV à la direction DB. Les rayons diviseurs cherchés sont ceux qui joignent le centre D aux points I, II, III, IV. On a, en effet,

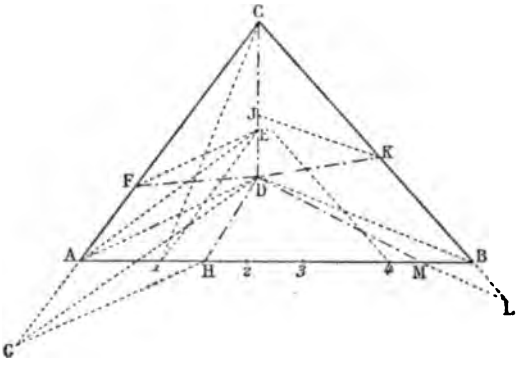
$$DAI = DAB - DIB = DAB - D1B = 1AB = \tfrac{1}{5}ABC,$$
$$DIII = DIB - DIIB = D1B - D2B = 21B = \tfrac{1}{5}ABC,$$

et ainsi de suite.

215. *Diviser l'aire d'un triangle en un nombre quelconque de parties équivalentes, au moyen de rayons concourant en un point donné dans l'intérieur du triangle.*

Soit D (*fig.* 138) le point donné dans le triangle ABC, à diviser,

Fig. 138.



par exemple, en cinq parties équivalentes. On joint ce point aux trois sommets et l'on divise l'un quelconque des côtés, AB, en cinq parties égales. Par le point de division 1 on mène une parallèle

à AC, jusqu'à la rencontre de DC en E, et par le point E une parallèle à DA, jusqu'à la rencontre de AC en F. Les droites DF, DC appartiennent au faisceau diviseur, car si l'on joint EA, C 1, on a

$$CDF = CEF + EDF = CEF + FEA = CEA = C1A = \tfrac{1}{5}CBA.$$

Par le point G, situé sur CA, à la distance FG = FC du point F, on mène une parallèle à AD, jusqu'à la rencontre de AB en H. La droite DH est un troisième rayon diviseur; car, en menant DG, on a

$$FDHA = FDA + ADH = FDA + ADG = FDG = CDF = \tfrac{1}{5}CBA.$$

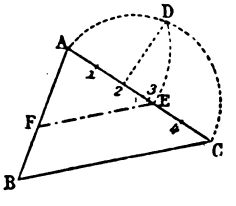
On démontre de la même manière, d'une part, que la parallèle 4J à BC et la parallèle JK à DB déterminent le point K d'un quatrième rayon diviseur DK; d'autre part, que la parallèle à BD, menée par le point L situé sur BC, à la distance LK = KC, rencontre AB au point M du cinquième rayon DM.

Le faisceau D)FCKMH divise donc l'aire ABC en cinq parties équivalentes.

216. *Former, avec deux côtés d'un triangle et une parallèle au troisième côté, un autre triangle qui soit au premier dans un rapport donné.*

Soient ABC (*fig.* 139) le triangle donné, $\frac{2}{5}$ le rapport donné, AB et AC les côtés qui doivent rester communs aux deux triangles. On divise l'un de ces côtés, AC par exemple, en cinq parties égales, et au point de division 2 on élève sur AC une perpendiculaire, qu'on prolonge jusqu'à son point de rencontre D avec le demi-cercle décrit sur AC. On prend AE = AD et, par le point E, on mène, parallèlement à CB, la droite EF qui répond à la question posée. On a, en effet,

Fig. 139.



$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 = A2.AC = \tfrac{2}{5}\overline{AC}^2$$

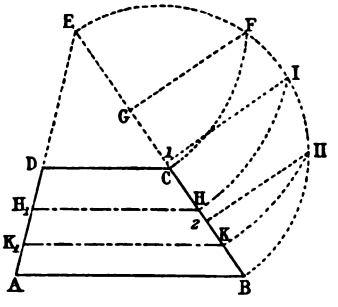
et, par suite,

$$\frac{AEF}{ACB} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{2}{5}.$$

217. *Diviser un trapèze en un certain nombre de parties équivalentes, ou de parties qui soient entre elles dans des rapports donnés, au moyen de rayons ayant pour centre : 1° le point à l'infini des côtés parallèles du trapèze; 2° le point de concours des côtés non parallèles.*

Soit, dans le premier cas, un trapèze ABCD (*fig.* 140) à diviser en trois parties équivalentes. On prolonge les côtés AD, BC jusqu'à leur rencontre en E; on décrit une demi-circonférence sur BE, on prend EF = EC, on abaisse FG perpendiculaire sur BE, on divise BG en trois parties égales, et l'on élève sur cette droite, aux points de division 1, 2, des perpendiculaires que l'on prolonge jusqu'à leurs points d'intersection I, II, avec le demi-cercle EFB. On prend enfin EH = EI, EK = EII et, par les points H, K, on mène, parallèlement à BA, les transversales HH_1, KK_1, qui divisent le trapèze dans les conditions demandées. On a, en effet (216),

Fig. 140.



$$(\alpha) \qquad \frac{EHH_1}{ECD} = \frac{E1}{EG}.$$

soit, en retranchant l'unité de chacun des deux termes,

$$(\beta) \qquad DCHH_1 = G1 \cdot \frac{ECD}{EG}.$$

On a de même

$$H_1HKK_1 = 12 \cdot \frac{EHH_1}{E1}.$$

Mais $G1 = 12$ et, d'après (α), $\frac{EHH_1}{E1} = \frac{ECD}{EG}$; donc $H_1HKK_1 = DCHH_1$, et ainsi de suite.

S'il s'agit de diviser l'aire du trapèze, non plus en parties équivalentes, mais en parties proportionnelles à des nombres donnés, on remplace la division de la droite GB en parties égales par une division en parties proportionnelles aux mêmes nombres, et l'on

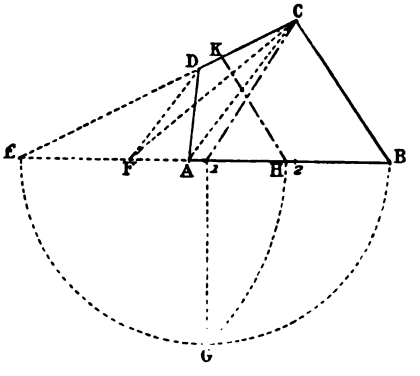
effectue toutes les autres parties de la construction comme dans le cas précédent.

Dans le second cas de l'énoncé, on divise l'un des côtés parallèles conformément aux conditions posées, et l'on projette les points de division sur l'autre côté parallèle au moyen de rayons issus du point commun aux côtés concourants.

218. *Diviser un quadrilatère quelconque, par une parallèle à l'un de ses côtés, en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné.*

Soient ABCD (*fig.* 140 *bis*) le quadrilatère donné, $\frac{1}{2}$ le rapport donné, BC le côté auquel la transversale doit être parallèle. On

Fig. 140 *bis*.



prolonge les côtés opposés BA, CD jusqu'à leur rencontre en E; on mène, par le sommet D, la droite DF parallèle à la diagonale AC et l'on divise FB dans le rapport donné. La droite 1C, qui joint le point de division au sommet C, détache du quadrilatère donné le quadrilatère ADC1, équivalent au triangle FC1, et par conséquent à la moitié du triangle 1CB. Pour substituer à la divisoire 1C une parallèle au côté BC, on décrit une demi-circonférence sur EB, on élève au point 1 la perpendiculaire 1G à EB, on prend EH = EG, et la parallèle HK à BC est la transversale cherchée. On a, en effet (217 β),

$$\frac{\text{HBCK}}{\text{EHK}} = \frac{1\text{B}}{\text{E}1} = \frac{1\text{BC}}{\text{E}1\text{C}}.$$

219. *Diviser un quadrilatère en un nombre quelconque de parties qui soient entre elles dans des rapports donnés, au moyen de transversales prenant appui sur deux côtés opposés.*

Soient AB, DC (*fig.* 141) les côtés du quadrilatère ABCD qui doivent être coupés par les transversales. On mène, parallèlement à DC, la droite AA′ qui décompose le quadrilatère en un trapèze ADCA′ et en un triangle AA′B. On divise, comme dans le second cas du n° 217, le trapèze en parties qui soient entre elles dans les rapports donnés, au moyen des rayons FF′, GG′, appartenant au

Fig. 141.

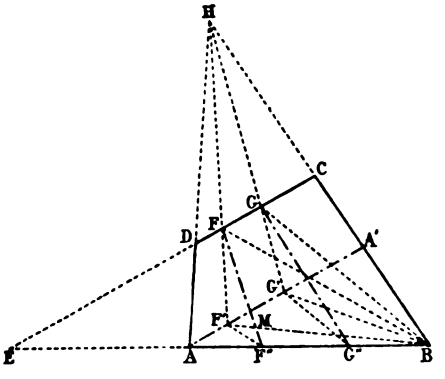
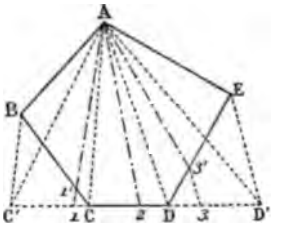


Fig. 142.



même faisceau H que les côtés DA, CB, et l'on joint les points F′, G′ au sommet B. Le quadrilatère donné se trouve ainsi décomposé en trois figures, DFF′BA, FGG′BF′, GCBG′, qui sont entre elles dans les rapports donnés. On projette enfin F′ en F″, par une parallèle à FB, et G′ en G″ par une parallèle à GB. Les droites FF″, GG″ satisfont à la question posée. On voit, par exemple, que DFF″A ne diffère de DFF′BA que par la substitution du triangle FMF′ au triangle équivalent MBF″.

220. *Diviser un polygone en un nombre quelconque de parties équivalentes, ou de parties qui soient entre elles dans des rapports donnés :* 1° *au moyen de droites concourant à l'un des sommets ;* 2° *au moyen de droites non assujetties à cette condition.*

Soit, par exemple, le polygone ABCDE (*fig.* 142) à diviser en

quatre parties équivalentes, au moyen de rayons issus du sommet A. On transforme ce polygone en un triangle équivalent AC′D′, dont on divise la base C′D′ en quatre parties égales. On projette les points de division 1 et 3 en 1′ sur BC et en 3′ sur DE, au moyen de droites respectivement parallèles à CA et à DA, le point 2 se confondant d'ailleurs avec sa propre projection sur CD. Les rayons A1′, A2, A3′ divisent le polygone dans les conditions demandées. On a, en effet,

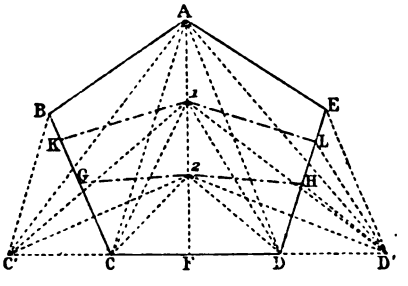
$$AE3' = AED - A3'D = AD'D - A3D = AD'3 = \tfrac{1}{4}\,ABCDE,$$

et ainsi des autres parties.

On opérerait de la même manière la division en parties proportionnelles, sauf à tenir compte des données correspondantes dans la division de la base auxiliaire C′D′.

Soit maintenant le polygone ABCDE (*fig.* 143) à diviser en trois parties égales au moyen de droites qui ne sont plus assujetties à passer par l'un des sommets. On transforme, comme dans le cas précédent, le polygone en un triangle équivalent AC′D′, dont on divise la hauteur en trois parties égales. On mène les droites

Fig. 143.



C′G, C′K, D′H, D′L, respectivement parallèles aux droites C2, C1, D2, D1, et l'on joint le point 2 aux points G et H, le point 1 aux points K et L, par des droites qui divisent l'aire donnée dans les conditions de l'énoncé. On a, en effet,

$$\begin{aligned} CDH2G &= CD2 + GC2 + DH2 \\ &= CD2 + C'C2 + D'D2 = C'D'2 = \tfrac{1}{3}\,ABCDE; \end{aligned}$$

de même,

$$CDL1K = C'D'1 = \tfrac{2}{3}\,ABCDE$$

et, par suite,

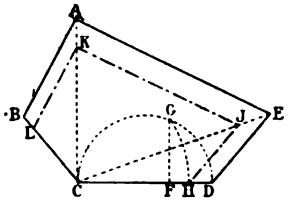
$$CDH\,2G = G\,2HL\,1K = K\,1LEAB.$$

Si les aires partielles devaient être entre elles dans des rapports donnés, autres que l'unité, on diviserait AF en segments qui fussent entre eux dans les mêmes rapports, et l'on procéderait, à cette différence près, de la même manière.

221. *Diviser l'aire d'un polygone en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné, l'une de ces parties étant un polygone semblable au polygone donné.*

Soient, pour fixer les idées, ABCDE (*fig.* 144) un pentagone donné, et $\frac{2}{3}$ le rapport donné entre ce pentagone et le pentagone partiel qui doit lui être semblable. Sur un côté quelconque, CD, de ABCDE, on prend $CF = \frac{2}{3}$ CD et l'on élève sur CD, au point F, la perpendiculaire FG qui coupe en G la demi-circonférence CGD. On prend CH = CG et l'on mène, par le point H, la parallèle au côté DE jusqu'à sa rencontre au point J avec la diagonale CE.

Fig. 144.



On mène ensuite JK parallèle à EA et KL parallèle à AB. On a ainsi le pentagone HJKLC qui résout le problème. En effet,

$$\overline{CH}^2 = CF.CD,$$

d'où

$$\frac{\overline{CH}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}.$$

Pour étendre aux aires à contour curviligne les constructions précédemment appliquées aux aires à contours polygonaux rectilignes, il suffira de substituer aux périmètres des premières des polygones inscrits ou circonscrits d'un assez grand nombre de côtés. Les solutions seront alors approximatives.

222. *Construire un cercle concentrique à un cercle donné,*

sous la condition que les aires des deux cercles soient entre elles dans un rapport donné.

Soient x le rayon du cercle cherché, r le rayon du cercle donné, $\frac{1}{n}$ le rapport des aires. On a

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{1}{n},$$

d'où

$$x = \sqrt{r \cdot \frac{r}{n}}.$$

Il suffira donc de construire la moyenne proportionnelle géométrique entre r et $\frac{r}{n}$. La *fig.* 145 indique la solution pour $n = 3$.

Fig. 145.

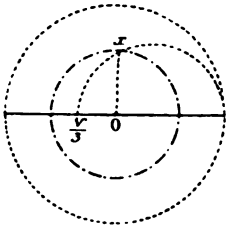
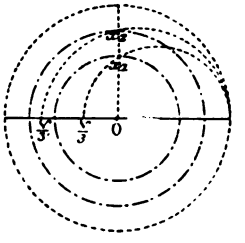


Fig. 146.



223. *Diviser un cercle en un nombre donné de parties équivalentes, au moyen de cercles concentriques.*

Soit r le rayon du cercle donné, qu'on se propose de diviser, par exemple, en trois parties équivalentes, et soient x_1, x_2 les rayons des cercles diviseurs. On a

$$\pi x_1^2 = \frac{\pi r^2}{3}, \qquad \pi x_2^2 = \frac{2\pi r^2}{3},$$

d'où

$$x_1 = \sqrt{r \cdot \frac{r}{3}}, \qquad x_2 = \sqrt{r \cdot \frac{2}{3} r}.$$

On construira les moyennes proportionnelles x_1 et x_2, comme l'indique la *fig.* 146.

CHAPITRE IX.

TRANSFORMATION DES FIGURES CURVILIGNES.

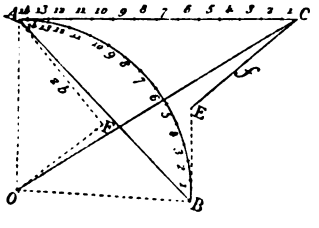
COUSINERY, *Le calcul par le trait*, etc., Paris, 1840, p. 84-86. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zürich, 1866, 10-13. — SCHLESINGER, *Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik*, Wien, 1868-69, § 94-100. — CREMONA, *Elementi di Calcolo grafico*, Torino, 1874, nos 101-107, 147-148. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zürich, 1875, nos 21-24.

I. — Transformation d'une aire limitée par des arcs de cercle.

224. On sait que l'aire d'un secteur circulaire est équivalente à celle d'un triangle qui aurait pour sommet le centre de l'arc et pour base la longueur du même arc rectifié suivant une de ses tangentes. On se base sur cette propriété pour transformer les aires limitées par des arcs de cercles.

Pour développer approximativement un arc AB (*fig.* 147) sur sa tangente en A, on prend une corde a, assez petite pour remplacer, sans erreur sensible, l'arc a qu'elle sous-tend, et on la porte sur l'arc AB, à partir du point B, autant de fois que cet arc la peut contenir. On arrive ainsi à un point très voisin de A, que l'on peut considérer comme commun à l'arc et à la tangente. On porte enfin, à partir de ce point, la longueur a sur la tangente autant de fois qu'on l'avait précédemment portée sur l'arc.

Fig. 147.



Proposons-nous de déterminer une valeur de l'arc a, telle que si l'on mesure, par l'inscription répétée de sa corde, l'arc AB $= l$, l'erreur soit plus petite qu'une quantité donnée d.

Cette erreur est égale à la différence entre l'arc a et sa corde, répétée autant de fois que a est contenu dans l. On a donc, r étant le rayon des arcs l et a,

$$(1) \qquad d = \frac{l}{a}\left(a - 2r.\sin\frac{a}{2r}\right),$$

mais on a, d'autre part, en développant,

$$2r.\sin\frac{a}{2r} = a - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{4r^2} + \frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{a^5}{16r^4} + \cdots.$$

La valeur de a étant toujours assez petite pour que le terme en a^5 et les suivants soient négligeables par rapport au terme en a^3, on peut écrire

$$2r.\sin\frac{a}{2r} = a - \frac{a^3}{24r^2}.$$

Substituant dans (1), il vient

$$d = \frac{a^2 l}{24r^2},$$

d'où

$$a = r\sqrt{\frac{24d}{l}}.$$

Si, l'unité étant le centimètre, on fait $d = \frac{1}{100}$, ou, pour simplifier, $d = \frac{1}{90}$, ce qui donne une approximation suffisante dans presque toutes les applications, on a

$$a = \frac{r}{2\sqrt{l}}.$$

Il importe de ne pas donner à a une valeur inférieure à la limite indiquée par cette formule; car l'inscription de la corde a dans l'arc l, répétée un trop grand nombre de fois, ferait perdre en précision plus qu'on ne gagnerait à réduire la différence entre l'arc et sa corde.

225. Le secteur OAB est transformé par l'opération précédente en un triangle OAC, que l'on sait réduire à une base donnée b.

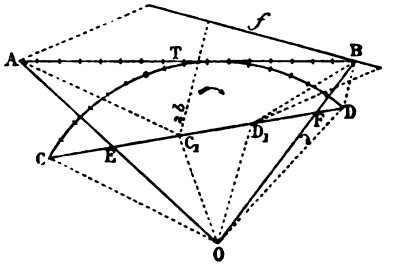
L'aire du segment circulaire $\overline{AB}$ est équivalente à la différence des aires des triangles OAC, OAB, c'est-à-dire (90) à l'aire bf du quadrilatère croisé OBAC. La base b étant arbitrairement choisie,

on détermine f par l'une des méthodes exposées au Chapitre IV. On construit, par exemple, le triangle rectangle OAF, avec OA pour hypoténuse et $AF = 2b$ pour côté de l'angle droit; on mène BE et CE respectivement parallèles à OA et à OF, et l'on a

$$CE = f.$$

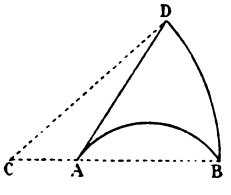
226. Au lieu de toucher l'arc à son origine, la tangente peut le toucher en un autre point quelconque T (*fig.* 148). On développe alors CT sur AT et DT sur BT. Le secteur OCD se trouve ainsi transformé en un triangle OAB, et le segment circulaire $\overline{CD}$

Fig. 148.



est équivalent à la différence OAB — ODC ou à la figure croisée OABODCO, qu'on doit considérer comme un hexagone dont deux sommets sont réunis au point O. Pour transformer cette figure en un quadrangle, on mène OC_1 et OD_1 respectivement parallèles à CA et à DB; les triangles OAC, ODB se transforment en deux autres, C_1AC, D_1DB, et le segment circulaire est équivalent au quadrangle ABD_1C_1, dont l'aire peut être exprimée par bf. On détermine f par la méthode connue.

Fig. 149.



227. On peut encore effectuer de la manière suivante la rectification d'un arc AB (*fig.* 149) sur sa tangente en A.

On prolonge BA d'une longueur $AC = \frac{1}{2}BA$ et du centre C, avec le rayon CB, on décrit un arc qui coupe la tangente au point D. Le segment AD est la longueur de l'arc donné, avec une erreur en moins dont le rapport à cet

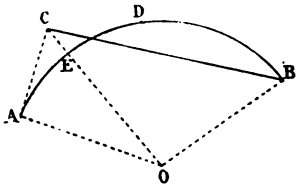
arc est

$$-\frac{\theta^4}{1080}-\frac{\theta^6}{54432}-\cdots,$$

θ étant le rapport de l'arc au rayon (¹).

228. Soient encore (*fig.* 150) D le point milieu de l'arc AB et E le point milieu de l'arc AD. Le rayon OE rencontre au point C la tangente en A. On joint CB. La longueur AC + CB représente le développement de l'arc donné, avec une erreur en plus dont le rapport à cet arc est

Fig. 150.



$$+\frac{1}{4320}\theta^4+\frac{101}{3483648}\theta^6+\cdots$$

Le nombre 4320 étant égal à 4×1080, si aux $\frac{4}{5}$ de la longueur donnée par la seconde construction on ajoute $\frac{1}{5}$ de la longueur donnée par la première, on aura une nouvelle valeur approximative de l'arc, avec une erreur en plus dont le rapport à cet arc est (²)

$$+\frac{17}{870912}\theta^6+\cdots.$$

229. La spirale d'Archimède et la spirale hyperbolique peuvent aussi être employées comme courbes auxiliaires pour la rectification de l'arc de cercle (³). Mais le procédé suivant est remarquable entre tous par sa simplicité (⁴).

(¹) Rankine, *On the approximate drawing of circular arcs of given lengths* (*Philosophical Magazine*, octobre 1867, p. 286).

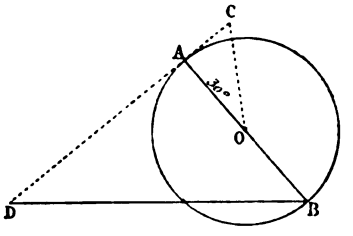
(²) Rankine, *On the approximate rectification of circular arcs* (*Philosophical Magazine*, nov. 1867, p. 381).

(³) Voir, pour les constructions proposées par le professeur A. Sayno : Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, Torino, 1874, p. 76.

(⁴) Cremona (*Elemente des graphischen Calculs*, Leipzig, 1875, p. 105) attribue cette construction à M. Ceradini; mais elle avait été précédemment indiquée par M. Schlesinger (*Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik*, gehalten am k. k. Polytechnischen Institute in Wien. Wien, 1868-1869, p. 28-29). Voir Kochanski, *Observationes cyclometricæ, ad facilitandam praxin accommodatæ*, dans les *Acta eruditorum*, Lipsiæ, 1685, p. 397. — Günther, *Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert*. Leipzig, 1875, p. 11.

Soient O (*fig.* 151) le centre et AB le diamètre du cercle dont le

Fig. 151.



rayon est égal à l'unité, et soit $\widehat{COA}$ l'angle de 30°. On prend CD égal au triple du rayon et l'on a

$$\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + (CD - CA)^2 = 4 + (3 - \tang 30^\circ)^2,$$

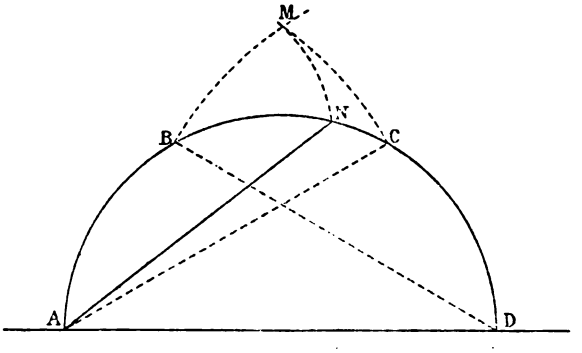
d'où

$$BD = 3,14153,$$

valeur qui, jusqu'à la quatrième décimale inclusivement, ne diffère pas de celle de la demi-circonférence. Ce procédé permet de réduire la rectification d'un arc plus grand que 90° à la rectification de l'arc supplémentaire.

230. Nous indiquerons enfin le procédé bien connu de Mascheroni [1].

Fig. 152.



Soit ABCD (*fig.* 152) un demi-hexagone inscrit dans un cercle

[1] MASCHERONI, *Géométrie du Compas*, traduction de A. M. CARETTE, 2e édit. Paris, 1828, p. 309.

dont le rayon est égal à l'unité. Des sommets A et D comme centres, avec $AC = \sqrt{3}$ pour rayon, on décrit deux arcs de cercles qui se coupent en M. Du sommet B, avec BM pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe le cercle ABC au point N. On a

$$\frac{1}{2}\,\text{corde BN} = \sin \text{arc}\,\frac{1}{2}\,\text{BN} = \frac{\sqrt{3-1}}{2},$$

d'où l'on tire, par les Tables,

$$\frac{1}{2}\,\text{arc}(\text{AB} + \text{BN}) = 51^\circ 46' \frac{1145}{2005}$$

et

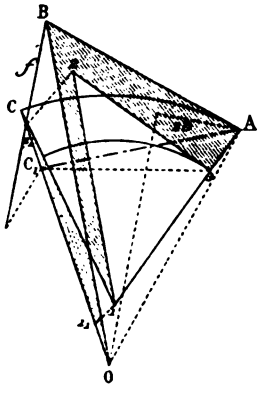
$$\text{corde AN} = 2 \sin \tfrac{1}{2}\,\text{arc AN} = 1.5711996,$$

nombre qui est, à $\frac{4}{10000}$ près, la valeur de $\frac{\pi}{2} = 1,5707963$ (¹).

II. — Application.

231. Soit proposé de réduire à une base donnée, $2b$, l'aire d'un arc de voûte compris entre deux arcs circulaires non concentriques (*fig.* 153) dont les centres sont respectivement aux points O et 1.

Fig. 153.



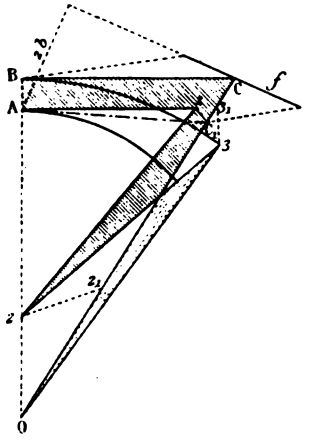
On rectifie les deux arcs sur leurs tangentes initiales, AB et 32. Les deux secteurs circulaires se transforment en deux triangles OAB et 132. La surface de l'arc de voûte est équivalente au triangle extérieur OAB, diminué du triangle intérieur 132 et du quadrangle OA1C, c'est-à-dire de l'aire OA321CO. En retranchant cette aire de OAB, on obtient le polygone croisé ABOC123A, dont les parties ombrées, situées à l'intérieur du triangle OAB, doi-

(¹) Le problème de la rectification du cercle a donné lieu à une infinité d'autres solutions. On en trouve une centaine dans la seule collection du *Scientific American*. Voir aussi E. Peraux, *Solutions graphiques de la division des cercles ou arcs de cercles et de différents autres problèmes de Géométrie pratique*. Paris, 1867.

vent être comptées en sens positif, tandis que la partie pointillée, extérieure au même triangle, doit être comptée en sens négatif. On transforme ce polygone en un quadrangle croisé $ABOC_1$ en menant (91) les droites 11_1, 22_2, $3C_1$ respectivement parallèles à $C2$, à $1_1 3$ et à $2_1 A$, jusqu'à la rencontre du côté fixe OC.

On détermine ensuite l'aire du quadrangle $ABOC_1$ par les moyens connus, c'est-à-dire en construisant sur la diagonale AO, prise comme hypoténuse, un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit soit égal à $2b$ et en mesurant, sur la parallèle menée par le point B au second côté de l'angle droit du même triangle, le segment f compris entre le point B et la droite menée par C_1, parallèlement à AO.

Fig. 154.



La figure devient un peu plus simple quand on n'opère que sur une moitié de la voûte (*fig.* 154). On remplace, en procédant comme il vient d'être dit, la surface de la demi-voûte par le polygone équivalent ABCO321A, qui a le même nombre de côtés que dans le cas précédent. On réduit ensuite (91) le contour A123o à la droite AC_1, et l'on obtient le quadrilatère $ABCC_1$, dont l'aire est représentée par le produit des segments $2b$ et f.

III. — Transformation des aires limitées par des courbes quelconques.

232. Dans la transformation des aires limitées par des courbes quelconques, on considère ces courbes comme composées d'une suite de petits segments paraboliques.

L'aire d'un segment parabolique est égale (G. 255) aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du triangle compris entre la corde du segment et les tangentes aux extrémités de l'arc, c'est-à-dire (G. 138) au produit de la corde par les $\frac{2}{3}$ de la flèche du segment, mesurée normalement à la corde. Cette aire est, par conséquent, équivalente à celle d'un triangle

ayant pour base la corde et pour hauteur les $\frac{4}{3}$ de la flèche h (*fig.* 155).

Cela posé, si la courbe qui circonscrit une aire à évaluer est divisée en une suite d'arcs assez petits pour qu'on puisse les considérer approximativement comme des arcs paraboliques, chacun des segments paraboliques compris entre l'un de ces arcs et sa corde pourra être transformé en un triangle équivalent, ayant pour base la corde elle-même et pour sommet un point quelconque de la parallèle à cette corde, situé à la distance $\frac{4}{3}h$. On peut disposer la figure de telle sorte que le sommet de chaque nouveau triangle se trouve sur le prolongement d'un côté du triangle précédent (*fig.* 156). Les sommets des deux triangles consécutifs sont alors alignés avec le point commun aux bases de ces triangles.

Le contour curviligne se trouve ainsi transformé en un polygone équivalent dont les côtés sont en même nombre que les segments

Fig. 155.

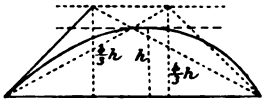
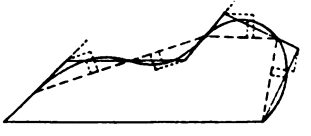


Fig. 156.



du contour. On réduit ce polygone à une base fixe par les moyens ordinaires.

La grandeur à donner aux arcs du contour qui doivent être remplacés par des arcs paraboliques dépend évidemment, pour un degré d'approximation donné, de la nature de la courbe à transformer. Nous nous bornerons à rechercher la mesure de l'erreur que l'on commet lorsqu'on détermine par cette méthode l'aire d'un segment circulaire.

Soient $2l$ la corde de ce segment, f sa flèche, 2α l'angle au centre, r le rayon du cercle. L'aire du segment, différence entre l'aire du secteur et celle du triangle, est

$$A = \alpha r^2 - l(r - f);$$

mais l'on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{f}{l} \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}l\left(\frac{l}{f} + \frac{f}{l}\right).$$

Substituant et supposant le rapport $\frac{f}{l}$ très petit, on a, en développant les formules en séries,

$$A = 4lf\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{f}{l}\right)^2 - \frac{1}{3.5.7}\left(\frac{f}{l}\right)^4 + \frac{1}{5.7.9}\left(\frac{f}{l}\right)^6 - \ldots\right].$$

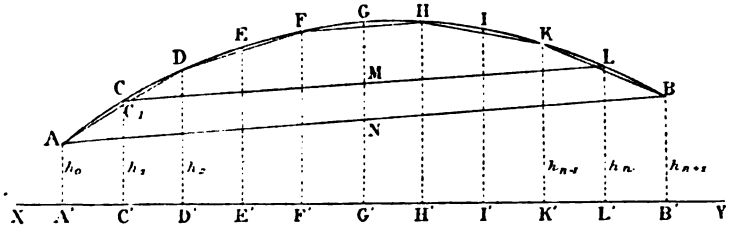
L'erreur que l'on commet en remplaçant cette aire par celle du segment parabolique $\frac{4}{3}fl$ est plus petite que $\frac{4}{3}lf.\frac{1}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^2$ ou plus petite que le produit de l'aire considérée par $\left(\frac{f}{2l}\right)^2$, c'est-à-dire par $\frac{1}{100}$, si l'on admet que la flèche soit égale au dixième de la corde.

IV. — Quadrature approximative par les formules de Simpson, de Poncelet et de Parmentier.

233. La méthode précédente permet d'évaluer très simplement les aires délimitées par des courbes quelconques; mais elle ne présente pas toujours un degré suffisant d'approximation. On obtient des résultats plus approchés par les méthodes que nous allons exposer.

Une aire plane, délimitée par une courbe quelconque, peut toujours être décomposée exactement en plusieurs autres, ayant chacune pour limites une droite XY (*fig.* 157), un arc AB de la

Fig. 157.



courbe et deux ordonnées AA', BB', (h_0, h_{n+1}) abaissées perpendiculairement sur la droite XY, des extrémités de l'arc AB. Divisons le segment A'B' en un certain nombre pair de parties égales, menons les ordonnées h_1, h_2, h_3, ... des points de division C', D', E', ..., et inscrivons à la courbe AB la ligne polygonale ADF ... KB, qui a pour sommets les extrémités des ordonnées

d'indices pairs $h_0, h_2, \ldots, h_{n+1}$. L'équidistance A'C' des ordonnées étant représentée par $\frac{1}{2}b$, on a, pour l'aire du premier trapèze rectiligne,

$$AA'D'D = \tfrac{1}{2}b(h_0 + h_2).$$

Remplaçons le petit arc de courbe AD par un arc parabolique du second ordre passant par les trois points A, C, D, et ayant pour axe une parallèle à la direction des ordonnées. La corde AD étant coupée en C_1 par l'ordonnée $C'C = h_1$, l'aire du segment parabolique ACD a pour expression (G. 255)

$$\frac{2}{3}b.CC_1 = \frac{2}{3}b\left(h_1 - \frac{h_0 + h_2}{2}\right).$$

En ajoutant cette aire à celle du trapèze rectiligne AA'D'D, on a, après réduction, pour l'aire du trapèze curviligne de mêmes sommets,

$$\tfrac{1}{6}b(h_0 + 4h_1 + h_2).$$

Les aires des trapèzes paraboliques DD'F'F, FF'H'H, . . ont pareillement pour expressions

$$\tfrac{1}{6}b(h_2 + 4h_3 + h_4),$$
$$\tfrac{1}{6}b(h_4 + 4h_5 + h_6),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et la somme de toutes ces aires partielles donne comme valeur approchée de l'aire proposée

$$A_1 = \tfrac{1}{6}b[h_0 + h_{n+1} + 2(h_2 + h_4 + \ldots h_{n-1}) + 4(h_1 + h_3 + \ldots + h_n)],$$

ou, en désignant par Σh_p la somme des ordonnées d'indice pair et par Σh_i la somme des ordonnées d'indice impair,

$$(1) \qquad A_1 = \tfrac{1}{6}b[2\Sigma h_p + 4\Sigma h_i - (h_0 + h_{n+1})].$$

Cette formule, due à Simpson [1], donne des résultats d'autant

---

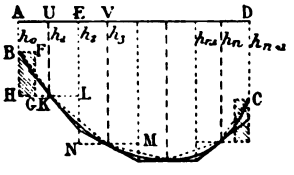
[1] Simpson, *Mathematical dissertations on physical and analytical subjects*. London, 1743. Catalan a remarqué (*Nouv. Ann. de Mathém.*, t. X, Paris, 1851, p. 412) que chacun des arcs paraboliques de Simpson étant indépendant des arcs qui le précèdent et qui le suivent, la courbe nouvelle, composée de l'ensemble de ces arcs, loin de former une ligne continue, présente presque toujours des jarrets très sensibles. Pour obvier à cet inconvénient, Catalan propose qu'après avoir fait passer un premier arc parabolique par les extrémités des trois premières ordonnées, on ne con-

plus approchés que les arcs de paraboles sont plus près de se confondre avec ceux de la courbe primitive; mais elle exige que l'on connaisse la valeur numérique d'un grand nombre d'ordonnées, et elle entraîne par conséquent des calculs assez laborieux. On réduit ces inconvénients en appliquant la formule suivante, proposée par Poncelet.

234. Soit ABCD (*fig.* 158) l'aire proposée, comprise entre la droite AD, la courbe BC et les ordonnées extrêmes h_0 et h_{n+1}. On trace, comme précédemment, entre ces ordonnées extrêmes, les ordonnées intermédiaires $h_1, h_2, \ldots, h_n$, dont l'écartement constant

$$AU = \frac{b}{2} = \frac{AD}{n+1}.$$

Fig. 158.



On mène les tangentes à la courbe BC aux extrémités des ordonnées $h_1, h_3, \ldots$, d'indices impairs, et l'on suppose l'écarte-

---

serve de cet arc que la partie comprise entre les ordonnées h_0 et h_1; on trace ensuite, dans les mêmes conditions, un second arc passant par les extrémités des ordonnées h_1, h_3, h_5, et l'on ne conserve de cet arc que la partie comprise entre les ordonnées h_1, h_3; on procède de même jusqu'à la fin de l'opération, et le seul arc dont on conserve tout le tracé est celui qui passe par les extrémités des trois dernières ordonnées. On répète la même opération en sens inverse, et l'on prend la moyenne des deux aires ainsi obtenues.

La formule donnée par Catalan est la suivante :

$$A = \frac{b}{2}\left[\Sigma h_p + \Sigma h_i - \frac{5}{8}(h_0 + h_{n+1}) + \frac{1}{6}(h_1 + h_n) - \frac{1}{24}(h_2 + h_{n-1})\right].$$

M. Leclert (*Annales du Génie civil*, 1868) a, de son côté, proposé la modification suivante à la formule primitive, bien connue, dite *formule des trapèzes*,

$$A = \frac{b}{2}\left[\Sigma h_p + \Sigma h_i + \frac{1}{4}(h_1 + h_n) - \frac{3}{4}(h_0 + h_{n+1})\right].$$

Lorsque le petit arc du trapèze mixtiligne compris entre deux ordonnées présente une courbure trop prononcée pour être négligeable, Cousinery (*Le Calcul par le trait*, p. 84-86) propose de substituer à la moyenne des ordonnées extrêmes du trapèze une ordonnée réduite que l'on obtient en prenant le sixième de la somme de ces deux ordonnées extrêmes, augmentée de quatre fois l'ordonnée intermédiaire; ce qui revient à supposer que l'on remplace le trapèze mixtiligne primitif par deux trapèzes rectilignes comprenant entre eux un rectangle dont la hauteur serait égale à l'ordonnée intermédiaire.

ment AU assez petit pour que deux tangentes consécutives se coupent sensiblement sur l'ordonnée intermédiaire d'indice pair. Le polygone de tangentes ainsi construit et le contour polygonal HLNM... servent de limites à des aires équivalentes, car les trapèzes rectilignes de la première sont respectivement équivalents aux rectangles de la seconde.

On joint, d'autre part, les extrémités des ordonnées consécutives d'indice impair, et l'on complète le contour inscrit en joignant l'extrémité de h_1 à celle de h_0, et l'extrémité de h_n à celle de h_{n+1}. On voit immédiatement que le polygone de cordes ainsi déterminé et le contour BFGLNM... servent de limites à des aires équivalentes.

L'aire limitée par les tangentes et l'aire limitée par les cordes ont donc même différence que les aires HLNM... et BFGLNM.... Cette différence est représentée par les deux petits rectangles, tels que BFGH, distingués par des hachures aux deux extrémités du contour; elle a donc pour expression

$$a = \tfrac{1}{4}\, b(h_1 - h_0) + \tfrac{1}{4}\, b(h_n - h_{n+1}).$$

L'aire cherchée étant comprise entre les aires P et P′ des polygones circonscrit et inscrit, on en aura une valeur approchée en prenant la moyenne des deux aires polygonales, ce qui revient à retrancher de la plus grande la moitié de la différence a (¹). L'aire circonscrite étant égale au produit de la double équidistance b par la somme des ordonnées d'indice impair, on a, comme expression de l'aire limitée par la courbure BC,

$$(2) \qquad A_2 = P - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}\left(2\Sigma h_i + \frac{h_0 + h_{n+1}}{4} - \frac{h_1 + h_n}{4}\right).$$

On voit que si le nombre de divisions de la base est égal à n, la formule de Poncelet ne fait intervenir que les $\frac{n}{2}$ ordonnées d'indice impair, plus les deux ordonnées extrêmes d'indice pair, tandis

(¹) Le procédé d'approximation par « *médiacion entre le plus et le moins* » est indiqué par « NICOLAS CHUQUET, parisien », dans le *Triparty de Nicolas en la science des nombres*, lequel fut cõmance, medie et finy à Lyon, sur le Rosne, l'an de salut 1484. » (*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze mat. e fis.*, t. XIII, Roma, 1880, p. 814.)

que la formule de Simpson exige que l'on connaisse la valeur numérique de $n+1$ ordonnées.

235. Si l'équidistance b a été prise assez petite pour qu'on puisse considérer comme des arcs paraboliques les arcs de courbe compris entre deux ordonnées consécutives d'indice impair, chacun de ces arcs partage le triangle formé par la corde qui le soustend et par les tangentes à ses extrémités en deux parties dont l'une, comprise entre la corde et la courbe, est double de l'autre, comprise entre la courbe et les tangentes (G. 255). La différence des aires limitées par le polygone des tangentes et par la courbe BC est donc égale au tiers de la différence a entre les aires des deux polygones circonscrit et inscrit. On a dès lors, comme expression plus approchée de l'aire limitée par la courbe,

$$(3) \qquad A_3 = b\Sigma h_i - \frac{a}{3} = \frac{b}{2}\left(2\Sigma h_i + \frac{h_0 + h_{n+1}}{6} - \frac{h_1 + h_n}{6}\right)^{(1)}.$$

---

(1) On a vu (231) que l'aire approchée A_2 donnée par la formule (2) est égale à

$$P - \frac{a}{2} = P' + \frac{a}{2}.$$

L'aire exacte S étant nécessairement comprise, soit entre P et $P - \frac{a}{2}$, soit entre $P' + \frac{a}{2}$ et P', l'erreur que l'on commet en substituant A_2 à S est moindre que

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4}\left(\frac{h_1 + h_n}{2} - \frac{h_0 + h_{n+1}}{2}\right),$$

mais (*fig.* 157),

$$\frac{h_1 + h_n}{2} = MG', \quad \frac{h_0 + h_{n+1}}{2} = NG'.$$

La limite supérieure de l'erreur a donc pour expression géométrique le produit $\frac{b}{4} \cdot MN$.

L'aire approchée A_3, donnée par la formule (3), est égale à

$$P - \frac{a}{3} = P' + \frac{2a}{3}.$$

L'aire exacte, toujours plus rapprochée de P que de P', ne peut se trouver qu'entre P et $P - \frac{a}{3}$ ou entre $P - \frac{a}{3}$ et $P - \frac{a}{2}$. Dans le premier cas, l'erreur est moindre que $\frac{a}{3}$; dans le second, elle est moindre que $\frac{a}{6}$. Elle est donc toujours moindre que

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{6} MN.$$

On pourra, dans l'un et l'autre cas, tracer, d'après une première valeur d'essai attribuée à b, les couples d'ordonnées extrêmes, l'ordonnée médiane et les droites AB,

236. Les formules (1) et (3) donnent un résultat identique et

---

CL; on mesurera ensuite MN, ce qui permettra de vérifier, avant tout calcul, si la limite d'erreur $\frac{b}{4}\cdot$MN ou $\frac{b}{6}\cdot$MN est compatible avec la nature de l'opération.

Le général PARMENTIER parvient à la formule (3) en éliminant Σh_p entre la formule (1) de SIMPSON (233) et une autre formule que l'on obtient, d'une manière analogue, au moyen d'arcs paraboliques croisant les premiers. Ces arcs raccordent respectivement les sommets d'ordonnées (h_1, h_2, h_3), (h_3, h_4, h_5), ..., (h_{n-1}, h_n, h_{n+1}); on complète l'expression de l'aire approchée en ajoutant les deux trapèzes rectilignes extrêmes, tels que ABKU (*fig.* 158). Cette aire *auxiliaire* A_4 est une fonction de Σh_i et de Σh_p, et l'on peut prendre comme nouvelle valeur approchée de l'aire à contour curviligne, soit $2A_1 - A_4$, soit $2A_4 - A_1$, ce qui permet d'éliminer à volonté Σh_i ou Σh_i. L'aire A_4 étant moins approchée que A_1 puisqu'on s'est contenté, pour les deux éléments extrêmes de la première, de l'approximation grossière du trapèze inscrit, il convient de préférer l'aire $2A_1 - A_4$, qui fournit, après réductions, l'aire A_3 de la relation (3).

Le général PARMENTIER a donné cette relation, d'abord dans le *Mémorial de l'officier du Génie* (n° 16, 1854, p. 290), puis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1re série, t. XIV, 1855, p. 390). Le général PIOBERT est arrivé à la même formule par des considérations différentes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XIII, 1854, p. 323. Voir aussi PARMENTIER, *Simplification de la Méthode d'interpolation de* THOMAS SIMPSON, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XV, 1876, p. 241, et *Extrait d'une lettre du général Parmentier*, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V. Bruxelles, MDCCCLXXIX, p. 166).

Le général PARMENTIER est arrivé depuis (*Nouvelles formules de quadrature*, dans le *Compte rendu de la onzième session de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1883, p. 64) à une nouvelle expression de l'aire approchée, en éliminant Σh_p de la formule de SIMPSON, au moyen d'une aire auxiliaire dans laquelle le premier et le dernier côté de la ligne polygonale, limitant les deux trapèzes extrêmes, sont remplacés par les segments d'arcs paraboliques qu'ils sous-tendent. On a ainsi

$$(4)\qquad A_4 = \frac{b}{6}\left[2\Sigma h_i + 4\Sigma h_p - \tfrac{11}{4}(h_0 + h_{n+1}) + (h_1 + h_n) - \tfrac{1}{4}(h_2 + h_{n-1})\right].$$

En retranchant cette aire du double de l'aire de SIMPSON, donnée par la relation (1), on a cette expression nouvelle

$$(5)\qquad A_5 = 2A_1 - A_4 = \frac{b}{2}\left[2\Sigma h_i + \tfrac{1}{4}(h_0 + h_{n+1}) - \tfrac{1}{3}(h_1 + h_n) + \tfrac{1}{12}(h_2 + h_{n-1})\right].$$

Cette formule, moins simple que (3), exige que l'on connaisse deux ordonnées de plus, h_2 et h_{n-1}; elle ne conduit cependant pas à des résultats beaucoup plus approchés. Elle donne, comme les formules de SIMPSON et de CATALAN, des aires exactes pour les arcs de paraboles du deuxième et du troisième degré. M. MANSION a d'ailleurs remarqué (*Mathesis*, supplément à la livraison de septembre 1881) que les aires A_5 du général PARMENTIER, A_1 de SIMPSON et A de CATALAN (note de la p. 310) ont entre elles la relation

$$A_5 = 3A_1 - 2A;$$

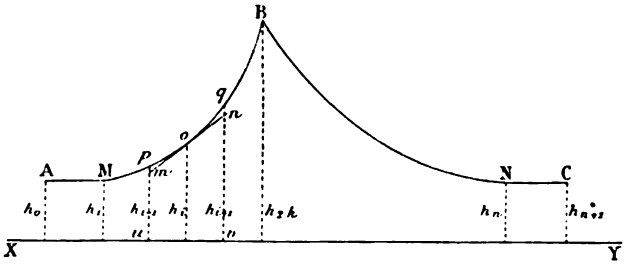
en sorte qu'on arrive aussi à la formule (5) en éliminant Σh_p entre les formules de SIMPSON et de CATALAN.

mathématiquement exact, lorsque le contour curviligne de l'aire est un arc de parabole.

Si toutes les ordonnées paires avaient la même longueur h et toutes les ordonnées impaires la même longueur $h' > h$, la formule de Simpson correspondrait à une série de branches ayant leurs sommets arrondis aux extrémités des ordonnées impaires et se relevant des deux côtés pour recouper les branches voisines à angles aigus sur les ordonnées paires. La formule de Parmentier donnerait au contraire une suite d'arcs paraboliques raccordés les uns aux autres, aussi bien sur les ordonnées paires que sur les impaires, ce qui est beaucoup plus conforme aux conditions ordinaires de la pratique. La formule (1) donne donc des résultats moins exacts que la formule (3) lorsque la courbe proposée ne présente pas d'angles rentrants.

Il en est autrement dans certains autres cas, et notamment dans celui de la *fig.* 159. La courbe ABC se compose de deux branches

Fig. 159.



qui présentent leur convexité à la base, qui se coupent en B sur une ordonnée d'indice pair et qui sont terminées par deux segments MA, NC parallèles à XY, de telle sorte que $h_0 = h_1$ et $h_n = h_{n+1}$. Les formules (2) et (3) donnent alors identiquement

$$A = b\Sigma h_i,$$

et chacune des aires partielles bh_i est un trapèze rectiligne *mnvu*, limité par la tangente à la courbe à son point d'intersection o avec l'ordonnée moyenne h_i. L'aire totale, calculée d'après l'une des deux formules considérées, est donc inférieure à l'aire exacte de la quantité représentée par la somme de tous les petits triangles

mop, *noq*. La formule de Simpson donne en ce cas une valeur plus approchée, à raison de la correction qui résulte du terme bh_{2k}.

Le résultat fourni par la formule (2), comme celui qu'on obtiendrait en prenant pour valeur approchée l'aire du polygone inscrit, est trop faible ou trop fort, selon que la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers la base. Avec la formule (3), au contraire, l'erreur est de même sens que si l'on prenait pour valeur approchée l'aire du polygone circonscrit. Quant à l'erreur de la formule (1), elle est généralement de même sens que celle de la formule (2).

APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE IX.

Aire maxima pour un périmètre donné [1].

237. L'étude du profil d'un canal comporte souvent la détermination du plus petit périmètre mouillé correspondant à une certaine aire mouillée, ou de la plus grande aire correspondant à un périmètre donné. On démontre en Géométrie élémentaire que, si le périmètre est formé de segments rectilignes dont les longueurs sont données, l'aire est maxima lorsque ce périmètre est inscrit dans une demi-circonférence.

---

(1) Voir sur cette question, et sur quelques autres qui s'y rattachent, LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, Leçon XXIe. — STEINER, Mémoire publié dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, de A.-L. CRELLE, t. XXIV, Berlin, 1841. — O. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIX, 32e cahier, 1848. — PAUL SERRET, *Des Méthodes en Géométrie*, Paris, 1855, p. 103 et suiv. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zurich, 1875, n° 25. — ED. COLLIGNON, *Hydraulique*, Paris, 1880, p. 276 et suiv.

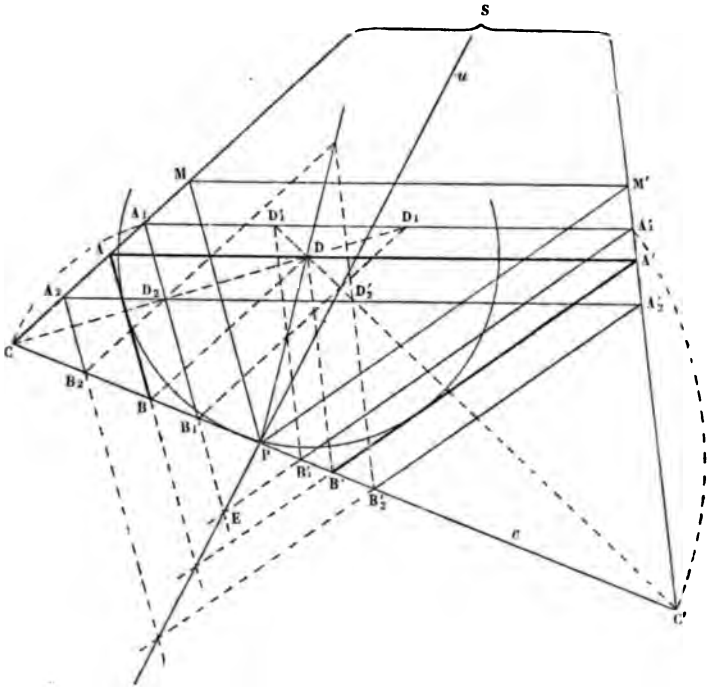
On trouve la première trace de la doctrine des *isopérimètres* dans le *Traité des isopérimètres* de ZÉNODORE, que nous connaissons en partie par le Commentaire de THÉON sur la *Syntaxe mathématique* de PTOLÉMÉE. ZÉNODORE y démontrait que, parmi les figures isopérimètres d'un même nombre de côtés, la plus grande est celle dont les côtés sont égaux. Il en déduisait la propriété du cercle d'envelopper l'aire maximum pour un périmètre donné (CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. I, Leipzig, 1880, p. 308-309, 379. — MAX. MARIE, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, t. I, Paris, 1883, p. 261). Quelques auteurs attribuent même à PYTHAGORE, non seulement la propriété précédemment énoncée du cercle, mais encore celle de la sphère d'être maximum parmi les figures de même surface (ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie élémentaire*, 3e édit., Paris, 1873, p. XIII). Il est en tout cas certain que PAPPUS, dans le Livre V de ses *Collections mathématiques*, a repris les propositions de ZÉNODORE sur les figures planes et les a étendues aux solides. (MAX. MARIE, *loc. cit.*, t. II, p. 50.) Le cinquième Livre des *Coniques* d'APOLLONIUS contient en germe ce que nous ont appris depuis les méthodes analytiques sur les questions de *maxima* et de *minima* (HALLEY, *Appollonii Pergæi Conicorum libri octo*, Oxoniæ, 1710; MAX. MARIE, *loc. cit.*, t. I, p. 172, t. II, p. 58). LHUILIER (*De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum*, 1782) a résumé, corrigé et considérablement accru, par ses propres découvertes, les travaux faits sur ce sujet depuis les Grecs jusqu'à R. SIMSON.

KEPLER paraît avoir observé le premier la propriété dont jouit une grandeur va-

Steiner a résolu le problème dans le cas réciproque où l'on connaît, non plus les longueurs des divers segments, mais leurs directions et la longueur du périmètre. Culmann a donné de la même question une solution géométrique directe, dont la suivante ne diffère que par la forme de la démonstration.

Soit $A_1B_1B'_1A'_1$ (*fig.* 160) un profil dans lequel A_1A_1' est le niveau de

Fig. 160.



l'eau, tandis que les trois autres côtés, dont la somme est égale à une longueur donnée p, sont respectivement parallèles à trois directions données. On prend, sur les prolongements de $B_1B'_1$, $CB_1 = A_1B_1$, $B'_1C' = B'_1A'_1$, en sorte que $CC' = p$. La parallèle à CA_1, passant par B_1, et la parallèle à

---

riable de ne varier que par degrés insensibles dans le voisinage de son état de maximum ou de minimum (*Nova stereometria doliorum, etc.; accessit, stereometriæ Archimedeæ supplementum*, Lincii, 1615). Un peu plus tard (1636), Fermat précisait ce premier aperçu dans sa célèbre méthode : *De maximis et minimis*.

L'un des problèmes de *maxima* et de *minima* qui ont occupé les géomètres consiste à trouver, pour un lieu donné, le jour de l'année où le crépuscule est le plus court. Résolu pour la première fois par Pedro Nunez (Nonius, *De crepusculis liber unus*, Lisbonne, 1542, et *Petri Nonii Opera*, Bâle, 1592), il a été repris en 1693 par

$C'A'_1$, passant par B'_1, coupent respectivement $A_1A'_1$ aux points D_1 et D'_1. On mène : 1° les droites CD_1, $C'_1D'_1$ qui se coupent en D; 2° l'horizontale passant par D, qui coupe CA_1 en A, $C'A'_1$ en A'; 3° les droites AB, A'B', respectivement parallèles à A_1B_1, $A'_1B'_1$. Il s'agit de démontrer que le profil ABB'A' (dont le périmètre mouillé est égal à p, car AB = CB et B'A' = B'C') est, parmi tous ceux qui satisfont aux données, celui qui contient la plus grande aire.

Traçons d'abord un troisième profil $A_2B_2B'_2A'_2$, tel que la ligne de niveau AA' soit comprise entre $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$. Les parallèles menées par B_2 à CA et par B'_2 à C'A' coupent A_2B_2 respectivement aux points D_2 et D'_2.

Les deux faisceaux de rayons parallèles de direction AA' et de direction BD, respectivement perspectifs au faisceau de direction AB (G. 40), sont projectifs (G. 41). Ils ont d'ailleurs comme rayon uni la droite à l'infini qui joint leurs centres. Ils sont, par conséquent, perspectifs (G. 44) et engendrent la ponctuelle DD_1D_2. . . . . Les deux faisceaux des directions AA' et B'D engendrent pareillement la ponctuelle $DD'_1D'_2$ . . . , perspective à la première, et les deux ponctuelles ont comme élément uni le point D d'intersection des rayons BD, B'D, déterminés par la position particulière AA' de la ligne de niveau.

Jean Bernoulli (*Opera omnia*, t. I, p. 64). Hachette (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. I, p. 159) rapporte que Monge a traité cette question en menant un plan tangent à deux cônes de même sommet. On trouvera dans l'Ouvrage précité de M. Paul Serret (p. 106) la solution du marquis de L'Hospital, fondée sur le principe de Fermat (*Analyse des infiniment petits*, Section III, exemple 13).

Le problème ne consiste pas toujours, comme dans le cas précédent, à déterminer sur une courbe la position d'un point mobile, correspondant au maximum ou au minimum d'une grandeur variable. On a souvent à chercher, parmi toutes les lignes dont les points extrêmes sont assujettis à certaines conditions communes et qui restent complètement indéterminées dans l'intervalle de ces points, celle pour laquelle une grandeur, dont la valeur dépend de la ligne tout entière, devient un maximum ou un minimum. (Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici, latissimo sensu accepti*, Lausanne, 1744, p. 2). Le premier problème de ce genre et le plus célèbre est celui de la *brachistochrone* ou de *la plus courte descente*, proposé par Jean Bernoulli. En publiant (*Acta Lipsiæ*, mai 1696. p. 206) la solution particulière à laquelle il était parvenu. Bernoulli mettait en doute la possibilité de trouver une méthode générale applicable à toutes les questions du même genre. Euler (*loc. cit.*) et Lagrange (*Recherche sur la méthode* de maximis et minimis; *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, etc., dans les *Miscellanea Taurinensia*, t. I à IV, 1760-1769), devaient, plus tard, mettre formellement en défaut les prévisions de Bernoulli. A côté de leurs célèbres méthodes analytiques, on ne doit pas omettre de citer les belles recherches purement géométriques de Maclaurin (*A complete system of fluxions*, Édimbourg, 1742, traduction française par le P. Pézenas, Paris, 1749, t. II, n°s 572, 574, 578, 588).

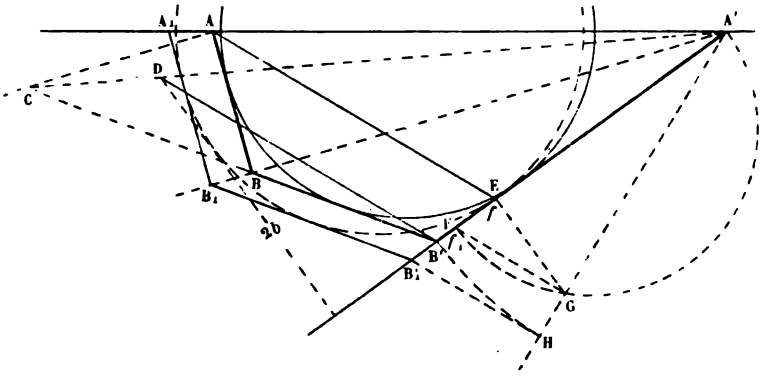
Cela posé, on voit immédiatement que le quadrilatère ABB'A' est équivalent au triangle CDC'; que le quadrilatère $A_1B_1B'_1A'_1$ est équivalent au quadrilatère croisé $CD_1D'_1C'$ et, par conséquent, au triangle CDC' diminué du triangle $DD_1D'_1$; enfin, que le quadrilatère $A_2B_2B'_2A'_2$ est équivalent au quadrilatère $CD_2D'_2C'$ et, par suite, au triangle CDC' diminué du triangle $DD_2D'_2$. Le quadrilatère ABB'A' a donc une aire supérieure à celles des quadrilatères qu'on obtient en prenant des lignes de niveau supérieures ou inférieures à AA'.

On voit d'ailleurs que BD, parallèle à la base CA du triangle isoscèle CAB, est bissectrice de l'angle ABC'. Pareillement, B'D est bissectrice de l'angle A'B'C. Le quadrilatère d'aire maxima ABB'A' est donc circonscrit à une demi-circonférence dont le centre est au point D.

On peut remarquer que les faisceaux semblables et perspectifs des directions AB et A'B' se coupent suivant une ponctuelle u, passant par S [1], et déterminent sur la droite CC' deux ponctuelles semblables et opposées dont les éléments unis sont le point à l'infini et le point P d'intersection de u et de c (G. 42). Lorsque les éléments B et B' s'unissent en P, le quadrilatère variable se réduit à un triangle MPM' inscrit à SCC'.

238. *Étant donné un profil* ABB'A' (*fig.* 161), *circonscrit à une demi-*

Fig. 161.



circonférence, construire un profil semblable et dont l'aire soit égale à une aire donnée S.

On réduit d'abord le quadrangle ABB'A' à une base $2b$, en disposant la

[1] En d'autres termes, d'après une propriété bien connue, les côtés des triangles variables, tels que $A_1EA'_1$, pivotant autour de trois points situés sur la droite à l'infini du plan, les sommets de ces triangles sont sur trois droites qui concourent en un point S.

figure de telle sorte que la hauteur correspondante f soit à mesurer sur l'un des côtés A'B' du profil, à partir de A'. A cet effet, on mène (90) AC parallèle à A'B jusqu'à la rencontre de B'B. On a ainsi le sommet C du triangle CA'B' équivalent au quadrangle donné. On prend ensuite sur A'C le point D, situé à la distance $2b$ de A'B', et la parallèle AE à DB' donne $A'E = f$ (87). L'aire du profil cherché n'étant pas bf, mais $S = bf_1$, les côtés de ce profil doivent être aux côtés de ABB'A' dans le rapport $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_1}}$. Pour déterminer celui de ces côtés qui est homologue à A'B', on décrit une demi-circonférence sur $A'F = f_1$, on élève la perpendiculaire EG à l'extrémité de f, on joint GA', GF, on prend, sur A'G, $A'H = A'B'$, et l'on mène HB'_1 parallèle à GF. Le segment $A'B'_1$ est, dans le profil cherché, l'homologue de A'B'. On a, en effet, en remarquant que $A'B' = A'H$,

$$\frac{A'B'}{A'B'_1} = \frac{A'G}{f_1} = \frac{\sqrt{ff_1}}{f_1} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f_1}}.$$

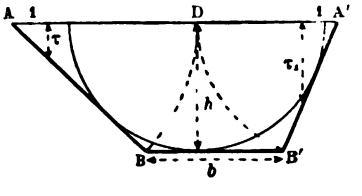
On complète le second profil par les droites B'_1B_1, B_1A_1, respectivement parallèles à B'B, BA.

239. Il est facile d'étendre les considérations des deux derniers numéros, soit aux quadrilatères circonscrits à une circonférence entière, soit aux polygones d'un nombre quelconque de côtés, circonscrits à une demi-circonférence ou à une circonférence entière. On est ainsi conduit à ces propriétés plus générales :

Les côtés d'un polygone se déplaçant, sans cesser d'être respectivement parallèles à des directions données, le rapport de l'aire au périmètre est maximum lorsque le polygone est circonscrit à une circonférence.

Dans un canal découvert, le rapport de l'aire au périmètre mouillé est maximum lorsque les côtés en nombre quelconque de ce périmètre sont tangents à une demi-circonférence dont le centre est sur la ligne d'eau.

Fig. 162.



240. Lorsque, dans le profil à aire maxima ABB'A' de la *fig.* 160, le côté BB' devient parallèle à AA', les angles ABD, ADB sont égaux, et l'on a $AB = AD$, $A'B' = A'D$. En d'autres termes, la somme des longueurs des deux talus est égale à la largeur du canal à la ligne d'eau.

Soient τ, τ_1 (*fig.* 162) les tangentes des angles A'AB, AA'B', b la base BB', h la hauteur du trapèze.

La section mouillée a pour expression

$$S = \frac{h}{2}\left(2b + \frac{h}{\tau} + \frac{h}{\tau_1}\right)$$

et le périmètre mouillé

$$p = 2b + \frac{h}{\tau} + \frac{h}{\tau_1}.$$

Le rapport de la section au périmètre, c'est-à-dire le rayon moyen (143), est donc, dans le cas du maximum,

$$\frac{S}{p} = \frac{h}{2}.$$

Le rayon moyen est donc égal à la moitié du rayon de la demi-circonférence inscrite.

On se donne ordinairement S, τ et τ_1, et l'on déduit le périmètre mouillé et le rayon moyen de la relation

$$\frac{2S}{p} = h = \sqrt{\frac{2S}{\frac{1}{\tau}\left(2\sqrt{1+\tau^2} - 1\right) + \frac{1}{\tau_1}\left(2\sqrt{1+\tau_1^2} - 1\right)}},$$

facile à établir d'après la figure.

Lorsque les deux talus ont même inclinaison, ce qui est le cas pratique, on a l'expression plus simple

$$h = \sqrt{\frac{S\tau}{2\sqrt{1+\tau^2} - 1}}.$$

CHAPITRE X.

TRANSFORMATION DES SOLIDES.

COUSINERY, *Le Calcul par le trait*, etc., Paris, 1840, p. 103-118. — BAUERNFEIND, *Vorlegeblätter zur Strassen-und Eisenbahnkunde*, etc. München, 1856, p. 7-12. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zürich, 1866, nos 16-23, et 1875, nos 28-32. — SCHLESINGER, *Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik*, Wien, 1868-69, nos 100-140. — WINKLER, *Vorträge über Eisenbahnbau*, etc., Prag, 1870, VII Kap. — UBILLOS, *Explanacion de un camino. Procedimientos graficos*, etc., Madrid, 1875. p. 43-45.

I. — Représentation des volumes par des segments de droites.

241. Transformer un solide donné, en le réduisant à une base donnée, c'est déterminer la hauteur d'un prisme de base donnée dont le volume soit égal à celui du solide (1).

On considère le volume V du solide comme le produit d'une aire S par une longueur ou hauteur k, et l'on réduit d'abord, suivant les règles précédemment exposées, l'aire S à une base b, telle que $bl = S$. On a, dès lors,

$$V = Sk = blk.$$

On réduit ensuite le produit lk, considéré comme une nouvelle aire, à une seconde base a, telle que $ah = lk$, et l'on a

$$V = Sk = abh.$$

La transformation des solides se réduit donc à une double trans-

(1) La solution graphique de ce problème était connue des géomètres arabes. (Voir, en effet, *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque du roi et autres bibliothèques, publiés par l'Institut de France, faisant suite aux Notices et Extraits lus au Comité établi dans l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*. Tome XIII. Paris, MDCCCXXXVIII, p. 126-150. — *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux*, par M. L.-P.-E.-A. SÉDILLOT, etc., t. I. Paris, 1845-49.

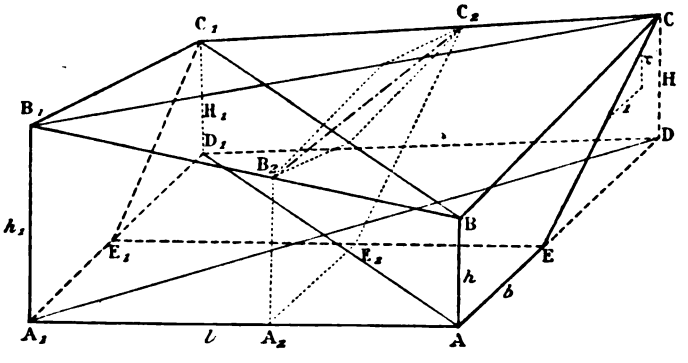
formation d'aires. Nous avons appris à transformer les aires dans tous les cas; nous n'avons donc pas à nous occuper de la transformation des solides géométriques simples, et nous nous bornerons à indiquer, dans l'étude qui va suivre, les dispositions particulières à adopter pour la transformation des solides irréguliers, et les règles à suivre dans le choix des dimensions sur lesquelles la transformation doit porter.

Les solides irréguliers, dont il s'agit de déterminer le volume, sont donnés le plus souvent par des sections transversales parallèles, plus ou moins espacées. Nous considérerons particulièrement, à raison de leur importance dans la pratique, les solides de déblai et de remblai auxquels donne lieu l'exécution des travaux de terrassements.

II. — Volume des solides réguliers de déblai et de remblai.

242. Soit proposé (*fig.* 163) un solide rectiligne de déblai ou de remblai, compris entre deux demi-sections transversales, ABCE et

Fig. 163.



$A_1B_1C_1E_1$, dont la distance $AA_1 = EE_1$ est supposée assez petite pour qu'on puisse considérer les arêtes BB_1 et CC_1 comme droites. On suppose droites aussi les lignes BC, B_1C_1, B_2C_2, du terrain naturel, dans les sections transversales extrêmes et dans une troisième section intermédiaire quelconque, parallèle aux précédentes. La surface du terrain naturel, dans le solide ainsi délimité, est un quadrilatère parabolique ayant pour directrices les droites BB_1, CC_1, et pour génératrices les droites BC, B_1C_1, ..., contenues

dans les plans parallèles des sections transversales. L'un quelconque de ces plans coupe le tétraèdre BCB_1C_1 suivant un parallélogramme dont une diagonale est la génératrice B_2C_2 du paraboloïde, située dans la même section; conséquemment, si l'on considère le tétraèdre comme composé d'une suite continue de tranches élémentaires parallèles aux sections transversales, on voit que chacune de ces tranches est partagée en deux parties égales par le paraboloïde. Le tétraèdre lui-même est donc divisé par le paraboloïde en deux solides équivalents. Dans les deux sections extrêmes, les parallélogrammes se réduisent à leurs diagonales respectives, c'est-à-dire aux génératrices BC, B_1C_1, du paraboloïde, et, des deux faces du tétraèdre passant par BC, l'une, BCB_1, est située au-dessus du quadrilatère parabolique, tandis que l'autre, BCC_1, est située au-dessous du même quadrilatère. Pareillement, les deux faces B_1C_1C et B_1C_1B sont, l'une au-dessus, l'autre au-dessous du quadrilatère parabolique.

On voit par là que le volume du prisme $ABCDA_1B_1C_1D_1$, situé au-dessous du quadrilatère parabolique, est la moyenne arithmétique entre le volume formé par la somme de deux prismes situés sous les faces BCB_1, B_1C_1C du tétraèdre et le volume formé par la somme des deux prismes situés sous les faces BCC_1, B_1C_1B du même tétraèdre.

Si l'on retranche du prisme moyen $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la pyramide tronquée $CDEC_1D_1E_1$, située sous le talus CEE_1C_1, on a, comme volume du solide proposé $ABCEA_1B_1C_1E_1$:

$$V = \tfrac{1}{2}(ADA_1BCB_1 + ADD_1BCC_1 + A_1D_1AB_1C_1B + A_1D_1DB_1C_1C) - CDEC_1D_1E_1.$$

Posons

$$AA_1 = EE_1 = l, \quad AE = A_1E_1 = b, \quad AB = h,$$
$$A_1B_1 = h_1, \quad DC = H, \quad D_1C_1 = H_1$$

et désignons par τ la tangente de l'angle que le talus CEE_1C_1 fait avec l'horizontale.

Nous avons alors

$$ED = \frac{H}{\tau}, \quad E_1D_1 = \frac{H_1}{\tau},$$

et les volumes des solides prismatiques sont représentés par

$$ADA_1BCB_1 = \tfrac{1}{2} l \left(b + \frac{H}{\tau}\right) \tfrac{1}{3}(h + H + h_1),$$

$$ADD_1BCC_1 = \tfrac{1}{2} l \left(b + \frac{H}{\tau}\right) \tfrac{1}{3}(h + H + H_1),$$

$$A_1D_1AB_1C_1B = \tfrac{1}{2} l \left(b + \frac{H_1}{\tau}\right) \tfrac{1}{3}(h_1 + H_1 + h),$$

$$A_1D_1DB_1C_1C = \tfrac{1}{2} l \left(b + \frac{H_1}{\tau}\right) \tfrac{1}{3}(h_1 + H_1 + H),$$

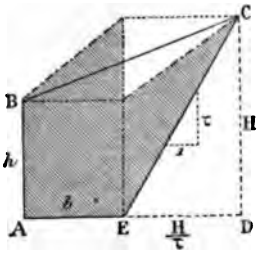
$$CDEC_1D_1E = \tfrac{1}{6} l \left(\frac{H^2}{\tau} + \frac{H_1^2}{\tau} + \frac{HH_1}{\tau}\right)$$

En substituant et réduisant, on aura, pour expression du volume cherché,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \tfrac{1}{4} lb(h + H + h_1 + H_1) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\frac{l}{\tau}(hH + h_1H_1) - \tfrac{1}{12} l(h - h_1)\frac{H - H_1}{\tau}. \end{aligned} \right.$$

243. Si l'on mène par le point E la parallèle à AB jusqu'à sa rencontre avec les parallèles à AD, menées par les points B et C, on transforme la section ABCE en une aire qui est représentée par la partie hachurée de la *fig.* 164. Cette aire, composée d'un trapèze et d'un triangle, a pour expression

Fig. 164.



$$A = \tfrac{1}{2} b(h + H) + \frac{hH}{2\tau}.$$

Pareillement, l'aire de la section $A_1B_1C_1E_1$ a pour expression

$$A_1 = \tfrac{1}{2} b(h_1 + H_1) + \frac{h_1H_1}{2\tau}.$$

Substituant dans (1), il vient

$$(2) \quad V = l\frac{A + A_1}{2} - \tfrac{1}{12} l(h - h_1)\frac{H - H_1}{\tau}.$$

L'aire $\frac{A + A_1}{2}$ étant la moyenne arithmétique des sections ex-

Soit x l'erreur commise dans cette approximation, c'est-à-dire la quantité dont il faudrait augmenter V′ pour obtenir V. Nous aurons

$$\tfrac{1}{6}b(h+h_1)(l+l_1)+x=\tfrac{1}{12}b(2hl+2h_1l_1+hl_1+h_1l);$$

d'où

$$x=\tfrac{1}{12}b(h_1-h)(l_1-l)$$

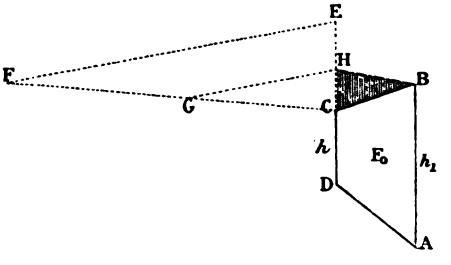
et, par suite,

$$V=F_0\frac{l_1+l}{4}+\tfrac{1}{12}b(h_1-h)(l_1-l)$$
$$=\frac{l_1+l}{4}\left[F_0+\tfrac{1}{3}b(h_1-h)\frac{l_1-l}{3(l_1+l)}\right].$$

Il suit de là que le volume exact V est égal au produit de la demi-longueur moyenne du solide cunéiforme par l'aire qu'on obtient en augmentant F_0 d'un triangle qui a pour base b et pour hauteur $(h_1-h)\dfrac{l_1-l}{3(l_1+l)}$.

Soit donc ABCD (*fig.* 167) l'aire F_0. On prolonge DC de la quantité $CE=h_1-h$; on porte sur une même droite quelconque,

Fig. 167.



à partir du point C, et en ayant égard aux signes, les segments CG et CF respectivement proportionnels à l_1-l et à $3(l_1+l)$. On mène enfin, par le point G, la parallèle GH à la droite FE. Le triangle d'erreur est alors représenté en grandeur et en signe par CBH.

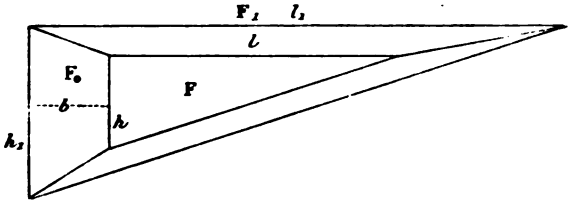
III. — Volume des solides irréguliers.

245. L'axe du tracé et, par conséquent, du solide à calculer, n'est pas toujours rectiligne; il présente même quelquefois des courbures de petit rayon. Le plus souvent, en pareil cas, on multiplie les aires des sections faites normalement à l'axe du tracé

et le volume du solide serait exactement égal au produit de l'aire moyenne par la distance entre les profils.

244. Les mêmes formules s'appliquent aux solides cunéiformes (*fig.* 166) qui se présentent souvent quand on passe du déblai au remblai. La section F_0 étant celle du profil transversal, en déblai ou en remblai, le plus voisin de la ligne de passage, les faces latérales F et F_1, parallèles et verticales, peuvent être considérées

Fig. 166.



comme correspondant aux deux sections transversales A et A_1 de la *fig.* 163, avec cette disposition particulière que la demi-plateforme $b = 0$ et que, par suite, les lignes du talus partent des pieds des ordonnées h et h_1. On voit, d'ailleurs, que la différence des projections horizontales de ces lignes est $l_1 - l$ et que la distance l, entre profils, est ici remplacée par l'épaisseur b du coin. Si donc on fait, dans la formule (2) du n° 243,

$$\frac{H_1 - H}{\tau} = l_1 - l, \quad l = b, \quad A = F, \quad A_1 = F_1,$$

on a, comme expression du volume du solide cunéiforme,

$$V = \tfrac{1}{2} b (F + F_1) - \tfrac{1}{12} b (h_1 - h)(l_1 - l),$$

soit, en faisant $F = \frac{1}{2} hl$, $F_1 = \frac{1}{2} h_1 l_1$ et réduisant

$$V = \tfrac{1}{12} b (2hl + 2h_1 l_1 + hl_1 + h_1 l).$$

Dans la pratique des calculs de terrassements, on ne connaît pas les aires latérales F et F_1, mais seulement l'aire transversale F_0, et l'on détermine approximativement le volume du solide en multipliant l'aire $F_0 = \frac{1}{2} b (h + h_1)$ par la demi-longueur moyenne $\frac{l + l_1}{4}$. On a, dès lors, comme expression approchée du volume :

$$V' = F_0 \frac{l + l_1}{4} = \tfrac{1}{8} b (h + h_1)(l + l_1) = \tfrac{1}{8} b (hl + h_1 l_1 + hl_1 + h_1 l).$$

volume du solide engendré par le mouvement d'une figure plane, constamment normale à la trajectoire de son centre de gravité, est égal à l'aire de la figure, multipliée par la longueur de cette trajectoire. Dans notre exemple, les aires S et S_1 ont pour trajectoires deux arcs concentriques dont les rayons sont respectivement de $17^m,50$ et de $22^m,50$. Les longueurs l, mesurées sur l'axe, doivent donc être diminuées de $\frac{2.50}{20} l = \frac{1}{8} l$ pour le déblai, et augmentées dans la même mesure pour le remblai.

IV. — Détermination des volumes au moyen des courbes de niveau.

246. On détermine souvent le volume des solides irréguliers au moyen des courbes de niveau (**104**).

---

a été donnée par MONTUCLA. M. LÉON RODET a proposé cette autre traduction, faite sur le texte grec : « Le rapport des rotations complètes est composé à la fois de celui des figures tournantes et de celui des droites semblablement menées sur les axes, de leurs centres de gravité. Celui des (rotations) incomplètes (est composé) de celui des figures tournantes et de celui des arcs qu'ont décrits les centres de gravité de ces figures; et le rapport de ces arcs est évidemment composé de celui des droites menées et des angles compris entre les extrémités de ces droites, quand bien même ces extrémités seraient tout auprès des axes de rotation. » PAPPUS se désigne clairement comme l'auteur de ce beau théorème dans les lignes suivantes, qui précèdent l'énoncé de la proposition : « J'ai honte de plusieurs géomètres que je vois s'occuper de recherches futiles au lieu de s'appliquer à l'étude de propositions plus utiles et plus générales. Et pour ne point exprimer gratuitement cette opinion, je vais leur dévoiler ceci, qui est peu connu. » PAPPUS montre bien, d'ailleurs, qu'il a compris l'étendue et la fécondité de ce principe, lorsqu'il ajoute, après l'avoir énoncé : « Ces propositions, qui, au fond, n'en font qu'une, comprennent sous une même dénomination un grand nombre de théorèmes variés sur les lignes, les surfaces et les solides. Quelques-uns de ces théorèmes ne sont pas encore démontrés; d'autres le sont, au contraire, et, parmi ces derniers, ceux qu'on lit dans le Livre XII des *Éléments*. » Il serait donc juste de donner le nom de PAPPUS au principe si fécond qui porte le nom de GULDIN; et cela d'autant plus que GULDIN cite plusieurs fois l'Ouvrage du géomètre d'Alexandrie dans la Préface de son Ouvrage, ce qui ne permet pas de supposer que la proposition de PAPPUS lui était inconnue. On peut d'ailleurs s'étonner que PAPPUS n'ait pas démontré cette proposition. Il en avait au moins deux occasions naturelles : l'une dans le Livre VIII, consacré à la Mécanique, l'autre dans le Livre V, où il refait précisément la théorie des surfaces et des volumes engendrés par des lignes ou par des surfaces tournantes.

Voir MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, nouvelle édition, t. I. Paris, an VII, p. 329-330. — KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, t. I. Leipzig, 1803, p. 428. — CHASLES, *Aperçu historique*, etc. Bruxelles, 1837, p. 29 et 90. — PONCELET, *Traité des propriétés projectives*, etc., t. I. Paris, 1866, p. XXV. — HOEFER, *Histoire des Mathématiques*. Paris, 1874, p. 263. — MAX. MARIE, *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, t. II, Paris, 1883, p. 47 et 55, et t. III, 1884, p. 169.

On règle ordinairement la distance constante entre les plans de deux courbes de niveau consécutives, de telle sorte que toute section plane verticale faite dans le terrain, normalement à ces courbes et entre leurs plans, puisse être considérée comme rectiligne. Si l'on admet, d'ailleurs, que deux courbes voisines sont semblables, le solide compris entre les plans de ces courbes pourra être considéré comme un tronc de cône et aura pour volume

$$V = \tfrac{1}{3} h (F + F_1 + \sqrt{FF_1}),$$

h étant la distance verticale entre les deux courbes et F, F_1 les aires de leurs sections.

Dans la pratique, on se borne à multiplier l'aire moyenne par h et l'on a

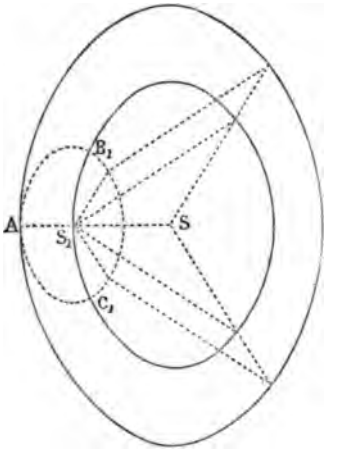
$$V = \tfrac{1}{2} h (F + F_1).$$

Ce volume excède le précédent de $\frac{1}{6} h (\sqrt{F} - \sqrt{F_1})^2$.

Les dimensions semblables des deux sections étant entre elles dans le rapport $\frac{\sqrt{F}}{\sqrt{F_1}}$, on pourra déterminer l'erreur par la construction suivante.

Soit S (*fig.* 169) le centre de similitude des deux courbes. Sur

Fig. 169.



la différence S_1A des rayons homologues SA, SS_1, on construit une courbe AB_1C_1, semblable aux deux précédentes. L'aire de cette

courbe sera $(\sqrt{F} - \sqrt{F_1})^2$. En multipliant cette aire par $\frac{1}{6}h$, on aura l'erreur cherchée. Le rapport $\frac{AS_1}{AS}$ étant ordinairement très petit, l'erreur est elle-même très petite. Une autre erreur peut provenir de ce que l'hypothèse faite sur la similitude des deux courbes consécutives ne se réalise pas complètement. Mais cette erreur, résultant d'une faible variation dans la longueur des rayons, S_1A, S_1B_1, S_1C_1, ..., est plus petite encore que la précédente lorsque $\frac{AS_1}{AS}$ est très petit.

247. Quand on se propose de déterminer le volume d'un mamelon, il arrive le plus souvent que le plan de la courbe horizontale supérieure est donné par un solide partiel en forme de calotte irrégulière. On mesure ce solide en multipliant l'aire de la dernière courbe horizontale qui lui sert de base par la moitié de sa hauteur, si la cime est arrondie ou cunéiforme, par un tiers de la même hauteur, si la cime est de forme conique, et, en général, par un tantième de la hauteur, compris entre 0,33 et 0,50, pour les diverses formes de la cime comprises entre les deux précédentes. Enfin, lorsque la cime est terminée par un plateau incliné, on multiplie la distance verticale, comprise entre le centre de gravité de ce plateau et la dernière section horizontale, par la demi-somme des aires de cette section et de la projection horizontale du plateau.

Le moyen le plus pratique pour déterminer les aires des diverses sections horizontales consiste à faire usage du *planimètre*. On fait ensuite la somme des aires de toutes les sections, on en retranche la demi-somme des aires des sections extrêmes et le produit de la différence par l'équidistance h donne le volume compris entre les deux sections extrêmes considérées.

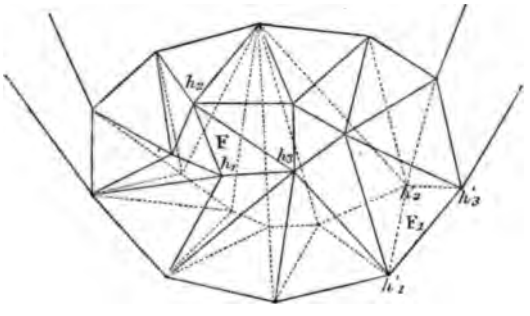
V. — Détermination des volumes au moyen de plans cotés.

248. Quand les solides ne sont pas très étendus en largeur, on évite souvent de relever des courbes horizontales, et l'on trouve plus commode de déterminer leurs volumes au moyen d'un plan coté. A cet effet, on relève et l'on nivelle sur le terrain un nombre suffisant de points pour qu'en les joignant deux à deux par des

droites, on détermine un réseau de triangles dont les plans se confondent sensiblement avec les parties correspondantes de la surface du solide. Chacun de ces triangles constitue la base supérieure d'un prisme tronqué, dont la base inférieure est la projection horizontale du même triangle. On a le volume de ce prisme en multipliant l'aire de sa base inférieure par le tiers de la somme des cotes qui se rapportent aux trois sommets de sa base supérieure. Cette détermination suppose qu'on a pu prendre comme plan de comparaison la base inférieure du solide proposé. Si cette condition n'a pas pu être remplie, et si le plan à partir duquel les cotes de niveau sont mesurées est situé à une certaine distance au-dessous de la base inférieure du solide, on devra retrancher du volume de chaque prisme le volume compris entre cette base inférieure et le plan de comparaison.

Soit à déterminer, par exemple, le volume d'une excavation représentée par la *fig.* 170, dans laquelle les lignes pointillées

Fig. 170.



indiquent le relief primitif du terrain. Ce volume sera

$$V = \Sigma \tfrac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3)F - \Sigma \tfrac{1}{3}(h'_1 + h'_2 + h'_3)F_1,$$

F représentant l'aire des faces triangulaires qui forment l'intérieur de l'excavation, F_1 l'aire des faces extérieures qui limitaient le terrain primitif, h et h', respectivement, les cotes des sommets des triangles F et F_1, par rapport à un plan de comparaison situé au-dessus de la masse à déblayer.

CHAPITRE XI.

CALCUL GRAPHIQUE DES MOUVEMENTS DE TERRES.

L. LALANNE, *Mémoire sur l'Arithmoplanimètre*, etc., Paris, 1840, p. 28-35, et *Méthode graphique pour la détermination de la distance moyenne de transport des déblais et des remblais*, Paris, 1879. — CULMANN, *Die graphische Statik*, Zurich, 1875, nos 33-35. — STROHL, *Note sur l'application de la méthode graphique aux mouvements des terres*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1884, 1er semestre, p. 156-180.

I. — Préliminaires.

249. La construction des voies de communication nécessite le déblaiement et le remblaiement du sol naturel suivant un profil donné de plateforme. Les dépenses auxquelles ces opérations donnent lieu varient avec le volume des terres et avec les distances de transport. La détermination des volumes a fait l'objet du Chapitre précédent. Nous nous occuperons ici des distances. Plusieurs procédés, numériques ou graphiques, servent à les calculer. L'un d'eux, enseigné en France, consiste à prendre pour abscisses les distances entre profils en travers, à porter en ordonnées des longueurs proportionnelles aux aires de ces profils, à déterminer les centres de gravité des figures ainsi construites, à en déduire les distances de transport des masses partielles et à calculer, d'après celles-ci, la distance moyenne de transport de la masse totale.

Nous allons exposer un autre procédé graphique, connu et pratiqué en Allemagne sous le nom de *Massennivellement* (1).

(1) Ce procédé, appliqué en 1844 par BRUCKNER à l'étude du plan incliné de Culmbach, diffère bien moins par les traits fondamentaux que par la forme et par les tracés de détail de la méthode que M. LALANNE avait déjà exposée dans le *Mémoire sur l'Arithmoplanimètre*, etc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1840, 2e semestre), comme application de l'instrument perfectionné d'OPPIKOFER et d'ERNST. (Voir LALANNE,

Il consiste essentiellement dans la construction d'un *profil* dit *de distribution*, qui diffère du profil en long ordinaire en ce que chaque *cote de hauteur* du terrain est remplacée par une ordonnée proportionnelle à la *somme algébrique* des volumes de remblai et de déblai, cumulés depuis l'origine du mouvement des terres jusqu'au point considéré. On admet, pour la détermination de cette ordonnée, que les volumes de remblai et de déblai sont des quantités respectivement positives et négatives.

Lorsque deux profils en travers consécutifs comprennent entre eux des parties en remblai et des parties en déblai, on suppose qu'un jet de pelle transversal, calculé séparément, a permis de compenser le plus petit des deux volumes avec une égale quantité du plus grand, et l'on n'a plus à considérer, comme intéressant le mouvement des transports longitudinaux, que la différence, positive ou négative, entre les deux volumes.

II. — Calcul des aires transversales. Profil transformé.

250. Le calcul du volume compris entre deux profils en travers consécutifs comporte la détermination préalable de leurs aires. Les périmètres de ces aires ayant le plus souvent un nombre de côtés supérieur à quatre, on les réduit d'abord en quadrilatères par la méthode précédemment indiquée (91-94). Cette méthode a l'avantage d'éliminer immédiatement, dans les profils mixtes, tous les cubes soumis à un simple jet de pelle transversal. On réduit ensuite à une même base donnée b (90) les quadrilatères résultant de la transformation. On obtient ainsi une suite de droites f qui représentent les aires à une échelle déterminée par le nombre de fois que la base donnée contient l'unité linéaire adoptée dans le tracé des profils [1].

Avertissement pour la *Collection de Tableaux et de procédés graphiques* joints à la *Circulaire ministérielle du* 30 *juillet* 1879, et *Réclamation de priorité au sujet de l'application des procédés graphiques au calcul du mouvement des terres*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1884, 1er semestre, p. 520 et 1885, 1er semestre, p. 79; voir aussi Culmann, *Traité de Statique graphique*, traduit par MM. Glasser, Jacquier et Valat, t. I, p. 597, Paris, 1880, et *Note sur l'application de la méthode graphique*, etc., par M. Strohl).

[1] On peut supposer, comme au Chapitre VII, que les demi-profils en travers

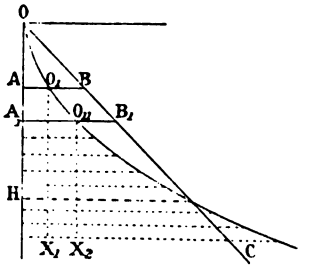
251. Considérons maintenant (*fig.* 172) un profil en long ordinaire, dans lequel le relief du sol, rapporté d'après le nivellement, est représenté par une ligne polygonale hachurée, et le tracé de la plateforme projetée par une ligne polygonale simple. Prenons une *ligne fondamentale* (*fig.* 173) et portons en ordonnées, à partir des points de division qui correspondent aux cotes sur l'axe du profil en long primitif, les longueurs f (positives ou négatives), déterminées par les réductions précédentes. Traçons enfin la ligne brisée qui joint les sommets des ordonnées consécutives. Nous obtenons ainsi le *profil transformé.*

III. — Calcul des volumes. Profil de distribution.

252. L'aire s du profil transformé, comprise entre deux ordonnées consécutives, est un trapèze ayant pour bases les droites qui représentent les aires réduites des profils en travers correspondants et pour hauteur la distance entre ces profils. L'aire s représente donc le volume de remblai à importer, ou de déblai à exporter entre les deux profils considérés (¹) et, en général, la somme

consistent en de simples quadrangles uniformément disposés (*fig.* 171) suivant les

Fig. 171.



contours communs ABC en remblai, A_1B_1C en déblai, de telle sorte que la ligne du terrain varie seule, d'un profil à l'autre, dans chacune des deux séries. Si l'on réduit ces demi-profils à la double base $OH = 2b$, on obtient comme courbe de réduction la parabole OO_1O_2 (Chap. VII). L'aire réduite d'un demi-profil de hauteur donnée est alors le produit de la base constante b par l'ordonnée horizontale y de la parabole, qui correspond à la hauteur considérée. Cette ordonnée doit être comptée à partir de l'axe vertical OX_1 en remblai et de l'axe OX_2 en déblai. La valeur de f, pour une section transversale complète, est la somme algébrique des deux ordonnées y, déterminée pour chacun des demi-profils de la section.

(¹) On sait (243) que le volume n'est pas exactement égal au produit de l'aire s

arithmétique S des aires comprises entre la ligne brisée et la fondamentale du profil transformé, représente deux fois le cube total du mouvement des terres.

Il suffit, d'après cela, de réduire à une base donnée b_1 les trapèzes du profil transformé, pour que les volumes représentés par ces trapèzes se trouvent réduits à de simples lignes droites. Pour arriver à ce résultat, on divise par moitié, aux points 1, 2, 3, 4, ... (*fig.* 173) les côtés du contour polygonal qui constitue le profil transformé, en ayant soin de considérer comme deux côtés distincts les segments d'un même côté qui sont situés de part et d'autre de la ligne fondamentale. On prend sur la fondamentale, à partir d'un point quelconque P, une longueur PO égale à la base de réduction qu'on a adoptée, on projette horizontalement les points 1, 2, 3, 4, ..., sur la verticale passant par le point O et l'on joint les nouveaux points 1, 2, 3, 4, ..., ainsi obtenus, au point P. Cela fait, on trace sur une nouvelle fondamentale parallèle à la précédente (*fig.* 174) les ordonnées verticales qui correspondent aux profils en travers et aux divers points d'intersection du profil transformé avec sa propre ligne fondamentale. A partir du point I, où la première de ces ordonnées rencontre la nouvelle fondamentale, on mène, parallèlement à P1 de la *fig.* 173, la droite IA qui coupe l'ordonnée II au point A. Du point A on mène la parallèle à P2 jusqu'à sa rencontre en B avec l'ordonnée III et ainsi de suite. La nouvelle ligne brisée ainsi obtenue est le *profil de distribution.*

Chacune des ordonnées de ce profil représente la somme algébrique des volumes, depuis l'origine du mouvement des terres jusqu'au profil en travers correspondant. On a, en effet, par les triangles semblables PO1 (*fig.* 173) et IIIA (*fig.* 174)

$$O1.III = PO.IIA.$$

Mais O1 est la demi-hauteur du triangle O2'H, qui représente le volume, III est la base du même triangle, PO la base de réduction adoptée b_1. Donc IIA représente le volume réduit à cette base.

---

moyenne par la distance entre profils, et qu'on peut opérer la correction en ajoutant ou en retranchant le triangle d'erreur.

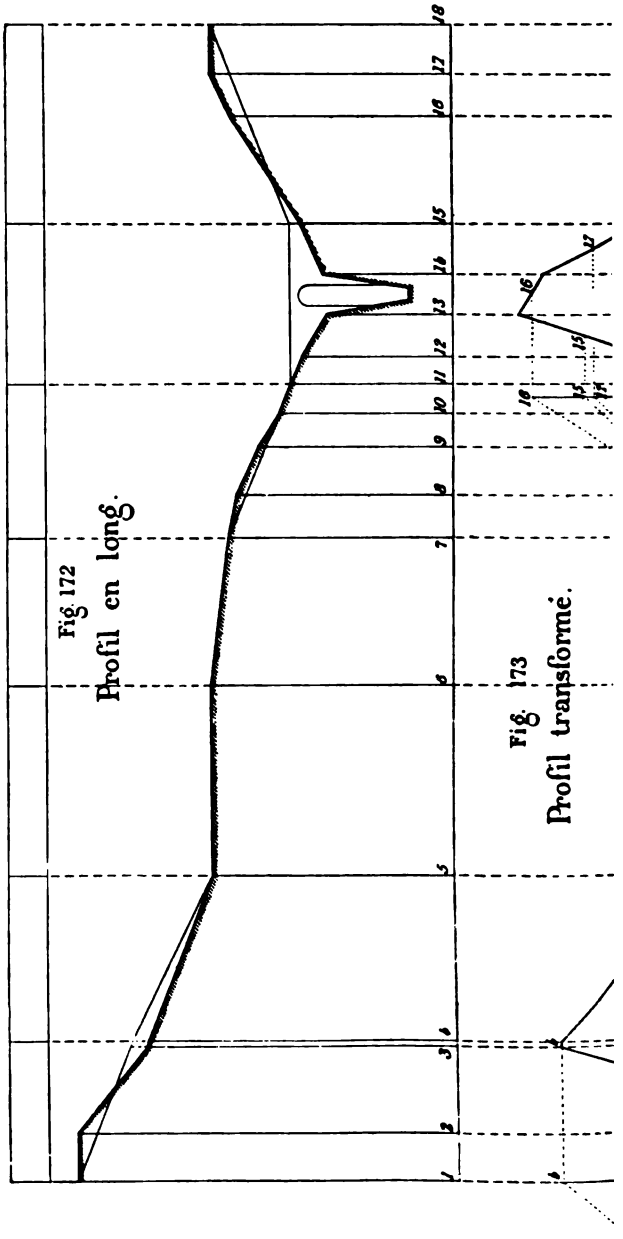


Fig. 172
Profil en long.
Fig. 173
Profil transformé.

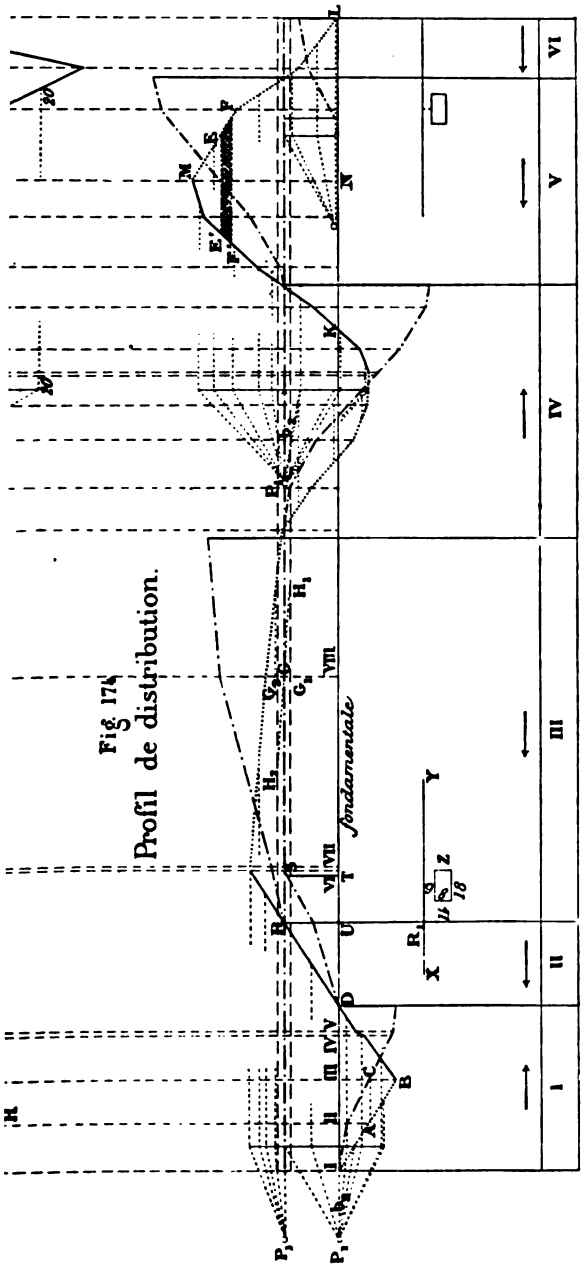


Fig. 174.
Profil de distribution.
fondamentale
I
II
III
IV
V
VI

Si l'on mène la parallèle AC à la fondamentale, on a, par les triangles semblables PO2 (*fig.* 173) et ACB (*fig.* 174),

$$PO.CB = O2.AC = O2.II\,III;$$

par où l'on voit que CB représente le volume (réduit à la base b_1) compris entre les profils II et III. De même III B = II A + CB représente la somme des volumes compris entre les profils I et III; et, en général, l'ordonnée qui correspond au profil en travers de rang n représente la somme algébrique des volumes compris entre l'origine et le $n^{\text{ième}}$ profil.

L'échelle à laquelle les ordonnées des volumes sont figurées dépend des bases de réduction choisies et du rapport entre les échelles de longueur et de hauteur adoptées pour l'établissement des profils. Si l'unité linéaire est le centimètre pour les profils en travers et le vingtième de centimètre pour les distances longitudinales entre profils; si, d'autre part, les bases de réduction des aires transversales en ordonnées du profil transformé et des aires représentant les volumes en ordonnées du profil de distribution sont respectivement $b = 2$, $b_1 = 4$, un centimètre, mesuré sur les ordonnées du dernier profil, représentera un volume de

$$20 \times 2 \times 4 = 160^{\text{mc}}.$$

IV. — Détermination des chantiers de transport.

253. Il résulte de ce qui précède que, si les ordonnées sont nulles en deux points du profil de distribution, la somme algébrique des volumes de déblai et de remblai entre ces deux points est nulle aussi. En d'autres termes, les déblais compensent exactement les remblais entre deux points du profil de distribution situés sur une même fondamentale, et le volume à transporter longitudinalement, dans l'étendue du tronçon limité à deux points consécutifs de cette sorte, est représenté par l'ordonnée maxima du profil de distribution dans le tronçon considéré.

Tout tronçon ainsi défini peut être considéré comme un *chantier complet* ou comme une section complète de transport. On nomme *reliefs* ou *dépressions* les aires partielles du profil de distribution qui représentent des chantiers complets, selon que ces

aires sont situées au-dessus ou au-dessous de la ligne fondamentale (¹).

254. Dans une aire quelconque de chantier complet, relief ou dépression, KML (*fig.* 174) un volume élémentaire de déblai, tel que EF, compris entre deux horizontales EE′, FF′, est destiné à constituer l'élément de remblai E′F′, déterminé par les intersections de ces horizontales avec la partie KM du profil de distribution. Le volume et la distance de transport de l'élément EF sont représentés respectivement par la hauteur et par la moyenne des bases du trapèze EFF′E′. Le *moment de transport* de EF, c'est-à-dire le produit du cube de cet élément par sa distance de transport, est donc représenté par l'aire du trapèze; et la somme des moments de transport de tous les éléments, tels que EF, qui constituent le cube total MN du chantier considéré, est représentée par l'aire totale KML de ce chantier.

255. Le déplacement de la ligne fondamentale, parallèlement à elle-même, a pour effet d'augmenter ou de diminuer les aires de tous les chantiers complets en relief, suivant qu'il a lieu de haut en bas ou de bas en haut, et de diminuer ou d'augmenter en même temps les aires de tous les chantiers complets en dépression. Mais la quantité dont l'une des deux suites d'aires augmente n'est généralement pas égale à la quantité dont l'autre suite diminue, et il s'agit de déterminer la position de la fondamentale pour laquelle la somme des aires des deux suites ensemble est un minimum. On vient de voir, en effet, que le minimum des aires n'est autre que le minimum des moments de transport; il correspond, par conséquent, au minimum des dépenses de transport.

Soient : Σb_r la somme des segments de la fondamentale qui ser-

---

(¹) L'examen du profil de distribution donne encore lieu aux remarques suivantes :

a. La ligne brisée du profil est, par suite de la convention sur les signes des volumes, ascendante de gauche à droite dans les parties en remblai (trait plein de la *fig.* 174), et descendante dans les parties en déblai (trait pointillé).

b. Les points culminants des reliefs et les points bas des dépressions correspondent respectivement aux points de passage du remblai au déblai, et *vice versa*.

c. Le transport du déblai au remblai s'effectue de droite à gauche dans les chantiers complets en relief, et de gauche à droite dans les chantiers en dépression.

vent de base à des reliefs et Σb_d la somme des segments qui ferment des aires en dépression. Pour un déplacement infiniment petit dh de la fondamentale, la somme des aires reliefs variera dans un certain sens de la quantité $\Sigma b_r dh$, et la somme des aires dépressions variera en même temps, mais en sens contraire, de la quantité $\Sigma b_d dh$. Par suite, la variation totale des moments de transport sera

$$(\pm \Sigma b_r \mp \Sigma b_d) dh.$$

Le minimum cherché correspond à la position de la fondamentale pour laquelle le déplacement infiniment petit dh n'entraîne aucune variation dans la somme des aires. On a, dans ce cas,

$$(\pm \Sigma b_r \mp \Sigma b_d) dh = 0$$

et, puisque dh ne peut pas être nul,

$$\Sigma b_r = \Sigma b_d.$$

Le minimum de dépense correspond donc au cas où la somme des bases de reliefs est égale à la somme des bases de dépressions. Pour déterminer la *ligne de compensation* qui satisfait à cette condition, on trace d'abord, suivant la méthode de fausse position [1], plusieurs fondamentales quelconques; on calcule, pour chacune d'elles, la différence $\pm \Sigma b_r \mp \Sigma b_d$, et l'on porte chaque différence sur l'horizontale qui l'a fournie, en prenant pour commune origine une verticale quelconque $G_1 G_2$, et en se dirigeant dans l'un ou l'autre sens ($G_1 H_1$, $G_2 H_2$), selon que l'on a

$$\Sigma b_r \gtrless \Sigma b_d.$$

Le lieu des points H_1, H_2, ... est la courbe d'erreur dont le point d'intersection G avec $G_1 G_2$ appartient à l'horizontale pour laquelle la différence entre les deux sommes de bases est nulle. Cette horizontale est donc la ligne de compensation.

Lorsque le profil de distribution ne présente aucun point de rupture dans la partie comprise entre deux fondamentales d'essai assez rapprochées, donnant lieu à des différences de bases de sens opposés, la courbe d'erreur se réduit à un segment de droite que deux points suffisent à déterminer.

---

[1] Voir ORELLI, *Lehrbuch der Algebra für Industrie und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht*. Zweite Auflage. Zürich, 1872, p. 504-510.

256. Nous avons raisonné jusqu'ici comme si le profil de distribution ne présentait que des chantiers complets, dans chacun desquels les volumes de remblai et de déblai se compensent exactement, ce qui aurait lieu seulement si la ligne de compensation passait par les points extrêmes du contour polygonal de distribution. Mais c'est là un cas tout particulier, et l'on voit, par exemple, que le profil de la *fig.* 174 présente à son origine, avant sa première intersection R avec la ligne de compensation, un circuit incomplet IBR, dans lequel une partie seulement du remblai BR peut être compensée par le déblai IB. On considère dans ce cas comme un chantier complet l'aire en dépression IBD, limitée à l'horizontale ID passant par l'origine, et il reste à se procurer par voie d'emprunt la contre-partie du remblai DR. Nous verrons bientôt comment cette opération complémentaire peut être figurée sur l'épure.

V. — Calcul graphique des moments de transport.

257. Dans les parties du terrassement à exécuter qui ne comportent ni emprunts ni dépôts, il suffit de calculer les aires complètes du profil de distribution pour avoir les moments de transport. On prend à cet effet une base de réduction sur l'horizontale de compensation, dont les segments sont les bases des aires considérées, et l'on procède comme on l'a déjà fait pour passer du profil transformé au profil de distribution. La plus grande ordonnée ainsi obtenue dans chaque opération partielle donne le moment de transport relatif à l'aire correspondante.

Pour les chantiers incomplets, à compenser par voie d'emprunt ou de dépôt, on calcule la distance du centre de gravité de l'emprunt ou du dépôt au lieu d'emploi du déblai ou de provenance du remblai, et le produit de cette distance par le cube à emprunter ou à déposer est un moment de transport que l'on peut représenter par une aire additionnelle sur le profil de distribution.

Soient, en effet, XY la projection horizontale de l'axe du tracé, Z le plan de la chambre d'emprunt qui doit fournir l'excédent de remblai DR, à la suite du chantier complet IBD, R_1 la projection sur XY de l'extrémité du tronçon DR qui est la plus voisine de l'emprunt. La distance moyenne de la chambre d'emprunt au point R sera, d'après les dimensions indiquées par la figure,

$$\tfrac{8}{2} + 6 + \tfrac{18}{2} + 14 = 33.$$

On porte cette distance sur la ligne de compensation, de R en S, et l'on construit le rectangle RSTU, qui représente la première partie du moment de transport relatif à l'emprunt, car RU et UT représentent respectivement le volume à emprunter et la distance que ce volume doit parcourir pour arriver en R. Le triangle RDU représente pareillement le moment de transport du volume RU, distribué, à partir du point R, sur le tronçon DU. Le moment total relatif à l'emprunt est donc représenté par l'aire DRSTD, que l'on peut calculer graphiquement, comme toutes les aires du profil de distribution. On procéderait de la même manière s'il s'agissait d'un dépôt.

Pour avoir l'échelle des ordonnées spéciales aux moments de transport, il faut tenir compte de toutes les réductions déjà faites (252), de la dernière base de réduction adoptée $b_2 = 3$, et du rapport de un à vingt entre les échelles du dessin, rapport dont on a fait deux applications successives. On a alors, en considérant que les volumes sont représentés par les hauteurs des aires,

$$2 \times 4 \times \overline{20}^2 \times 3 = 9600,$$

d'où il suit qu'à chaque centimètre mesuré sur une ordonnée des moments de transport correspond un moment égal à 9600.

VI. — Distances moyennes.

258. On connaît l'ordonnée des moments et celle des volumes pour chaque chantier. Il ne reste plus qu'à diviser la première par la seconde, en tenant compte des échelles, pour avoir la distance moyenne correspondante.

On obtient la distance moyenne générale de tous les chantiers réunis en faisant, sans distinction de signes, d'une part la somme de tous les moments, d'autre part la somme de tous les volumes, et en divisant la première somme par la seconde.

Aux distances horizontales ainsi déterminées on applique, s'il y a lieu, les correctifs indiqués par l'expérience pour tenir compte des rampes.

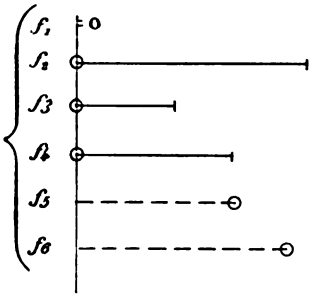
APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE XI.

I. — Construction directe du profil de distribution.

259. Un artifice de construction, proposé par M. Appoloni [1], permet de construire le profil de distribution sans passer par le profil transformé.

On réduit (**250**) les aires des profils en travers à une base b. On obtient ainsi (*fig.* 175) les ordonnées $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_6, \ldots$ qui représentent

Fig. 175.



ces aires. On prend ensuite la ligne fondamentale, XX′, du profil de distribution (*fig.* 176) et l'on trace, comme dans la méthode ordinaire, les verticales indéfinies sur lesquelles doivent se trouver les sommets de ce profil. Ces verticales correspondent, les unes 1, 2, 3, ..., aux profils en travers $f_1, f_2, f_3, \ldots$, les autres a, b, c, ..., aux points de passage du remblai au déblai ou *vice versa* [2]. On prend enfin sur XX′, ou sur une parallèle à cette fondamentale, un segment de droite PO, égal au double de la nouvelle base b_1 qu'on a choisie (**252**) pour la réduction des volumes en ordonnées du profil de distribution. A l'extrémité O de PO on élève la perpendiculaire YY′.

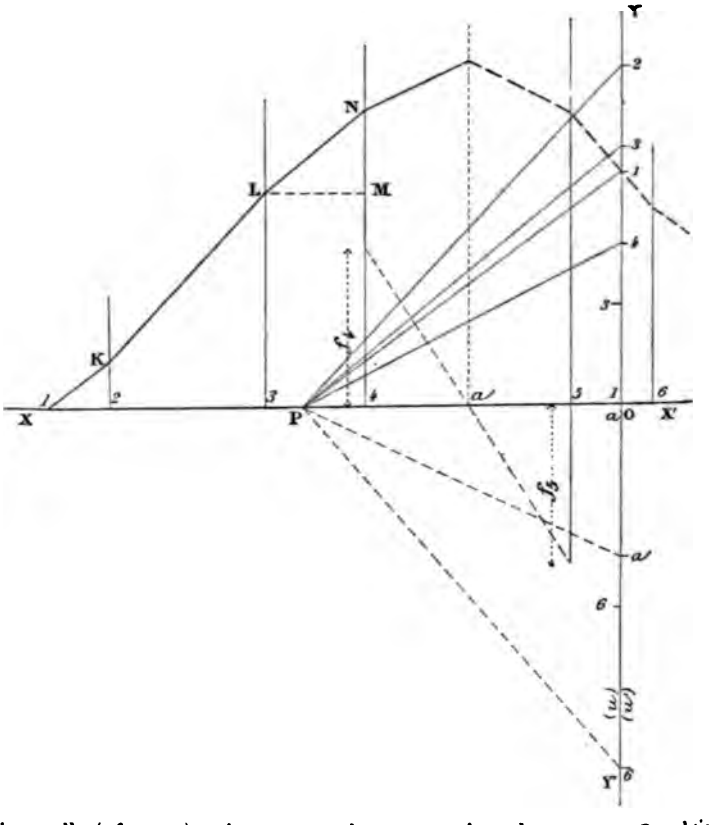
---

(1) F. Appoloni, *Metodo pratico per costruire il profilo di distribuzione nel calcolo grafico dei movimenti di terra.* Padova, avril 1884.

(2) Le point de passage a, situé entre deux profils consécutifs, 4 et 5, est à l'intersection de la fondamentale et de la droite qui joint les extrémités des ordonnées f_4, f_5.

L'épure étant ainsi préparée, on porte sur YY', à partir du point 0, pris comme origine commune, et en tenant compte des signes, des longueurs égales aux segments f_1, f_3, f_a, f_6, ..., qui représentent les profils en travers de rang impair. On fait figurer à leur rang, dans cette suite, non-seulement les profils en travers réels, mais aussi les profils fictifs et

Fig. 176.



d'aire nulle ($f_a = 0$) qui correspondent aux points de passage. On obtient de la sorte une première ponctuelle

$$1,\ 3,\ a,\ 6,\ \ldots,\quad (u)$$

dont on a soin de porter la graduation à gauche de YY'. On prend ensuite au compas les segments f_2, f_4, f_5, ..., représentant des profils de rang pair et l'on effectue sur YY' l'addition algébrique de chacun d'eux avec le segment du profil impair précédent, puis avec le segment du profil impair

suivant. On obtient ainsi, à droite de YY', une seconde ponctuelle dont chaque point de division est à une distance du point O égale à la somme des segments qui représentent deux aires transversales consécutives. On inscrit en regard de chacun de ces points le plus petit des deux indices particuliers aux deux segments qui le déterminent. C'est ainsi, par exemple, que le point obtenu par l'addition de f_2 et de f_3 porte l'indice 2. (Dans l'espèce, f_1 est nul comme f_a.)

La nouvelle ponctuelle

$$1, 2, 3, 4, a, 5, 6, \ldots, \quad (u')$$

étant ainsi tracée, on la projette du centre P. On a ainsi un faisceau dont les rayons sont respectivement parallèles aux côtés de la ligne polygonale qui doit constituer le profil de distribution. On construit ce profil en menant par le point d'origine 1, correspondant à la première section transversale, la parallèle 1 K à P 1, jusqu'à la verticale de la deuxième section, puis, à partir du point K, la parallèle KL à P 2, jusqu'à la verticale de la troisième section et ainsi de suite.

La ligne polygonale ainsi tracée est bien le profil de distribution, car elle satisfait à la propriété fondamentale de ce profil, à savoir : que la différence entre deux ordonnées consécutives quelconques représente le volume de terre à mettre en mouvement dans la partie du tracé comprise entre les profils en travers auxquels ces ordonnées correspondent. En effet, si par le sommet L d'une ordonnée quelconque on mène LM parallèle à XX', on a, par la similitude des triangles, LMN, PO3,

$$LM.O3 = PO.MN = 2b_1.MN$$

ou

$$(1) \qquad LM.\frac{O3}{2} = b_1.MN.$$

Mais LM est la distance entre les profils 3 et 4, $\frac{O3}{2}$ est la demi-somme des segments qui représentent les aires de ces profils, réduites à la base b. Le premier membre de (1) représente donc le volume compris entre les profils 3 et 4, réduit à la base b, et le segment MN, différence des ordonnées relatives à ces profils, représente le même volume réduit aux bases b et b_1. C'est ce qu'il fallait démontrer.

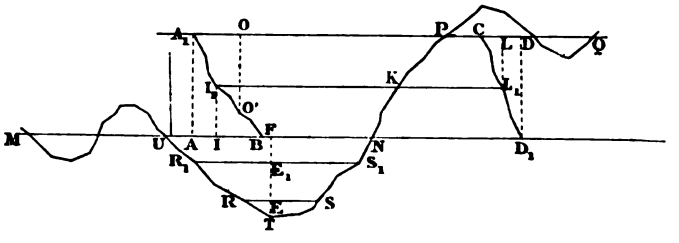
II. — Emprunts et dépôts en élargissement.

260. On a supposé (257) que les chambres d'emprunt ou les lieux de dépôts étaient placés à une distance de l'axe trop grande pour être né-

gligée. Il arrive souvent, sur les lignes de chemins de fer exécutées d'abord pour une seule voie, que les emprunts et les dépôts sont faits en élargissement des tranchées et des remblais, de manière à constituer d'avance une partie de l'assiette de la seconde voie. On peut, dans ce cas, réduire à la base *b* (250) les profils en travers ainsi élargis et représenter par une seule ordonnée *f* l'aire totale, comprenant le profil-type et l'élargissement. Mais, d'une part, cette disposition implique le choix préalable des lieux d'emprunt ou de dépôt; elle exclut, par conséquent, la possibilité d'être guidé dans ce choix par l'examen du profil de distribution. D'autre part, les profils en travers de la ligne proprement dite sont souvent réduits à des types uniformes dont on effectue la quadrature au moyen de tableaux graphiques spéciaux, sans tenir compte des élargissements. Il peut donc arriver qu'on ait à faire intervenir séparément, dans l'épure, des emprunts ou des dépôts pour lesquels les transports suivant l'axe de la ligne sont seuls à considérer.

Considérons (*fig.* 177) une partie de profil de distribution, MQ, dans

Fig. 177.



laquelle la compensation est exactement établie de M en N et de P en Q. On se propose de compenser le remblai NP, compris entre les fondamentales partielles MN, PQ, au moyen d'un emprunt par élargissement de tranchée, à pratiquer entre les points A et B. La perpendiculaire, élevée au point A sur MN rencontre l'horizontale PQ au point A_1. Considérons cette horizontale comme ligne fondamentale de l'emprunt, et traçons, à partir du point A_1, les ordonnées négatives, telles que OO', dont chacune représente le volume total de déblai à extraire de la chambre d'emprunt, depuis l'origine A_1 jusqu'au profil en travers O. La ligne brisée A_1B, qui joint les extrémités de ces ordonnées, se termine en B, sur la droite MN, car le volume du déblai A_1B, comme celui du remblai NP, est représenté par la distance AA_1 entre les deux fondamentales. L'aire A_1BNP est la mesure du moment de transport de l'emprunt AB employé en NP (254). On opère sur cette aire comme sur toutes celles des chantiers complets de la voie proprement dite.

Si l'emprunt devait être fait à droite de NP, entre les points C et D, la mesure du moment de transport serait donnée par l'aire $NPCD_1$.

On peut encore supposer que le remblai NP doit être fourni par deux chambres d'emprunt situées, l'une à gauche de NP, entre les points I et B, l'autre à droite, entre les points C et L. La somme $I_1 I + LL_1$ des volumes des deux emprunts devant toujours être égale au volume AA_1, les points I_1, L_1 sont sur une même horizontale, dont le point K d'intersection avec le contour polygonal marque la séparation des remblais des deux provenances. On opère sur la troisième fondamentale $I_1 L_1$ comme on l'a déjà fait sur les précédentes et les moments de transport des emprunts IB, CL, sont respectivement représentés par les aires $I_1 BNK$, $KL_1 CP$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent évidemment aux dépôts (1).

III. — Distinction des divers modes de transport.

261. On a raisonné, dans le Chapitre précédent, comme si toutes les parties du terrassement étaient transportées de la même manière, à l'exception des déblais déplacés transversalement à la pelle. Mais on est conduit, dans la pratique, à distinguer, selon les conditions locales et selon les distances, divers modes de transport pour chacun desquels une formule spéciale de payement est inscrite à la série des prix.

Le plus élémentaire des instruments de transport est la brouette; on l'applique aux petites distances. Pour les transports plus longs, on emploie ordinairement le tombereau, puis le wagonnet à traction de chevaux, puis le wagon à traction de locomotives (2).

Si nous désignons par d la distance que le véhicule doit parcourir, par p, p_1, p_2, p_3, respectivement, les prix de transport de l'unité de volume à l'unité de distance dans les cas de la brouette, du tombereau, du wagonnet et du wagon, par c_1, c_2, c_3, les éléments de prix destinés à rémunérer, dans les trois derniers cas, la partie des frais de transport par unité de volume qui est indépendante de la distance parcourue, nous aurons comme expres-

---

(1) Voir STROHL, *loc. cit.*, p. 162 et suiv.

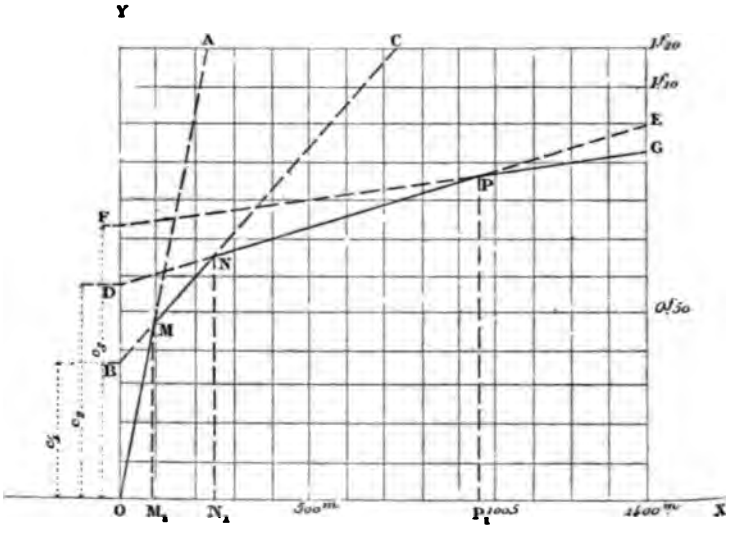
(2) L'adoption de ces derniers modes ne dépend pas seulement de la distance à parcourir, mais aussi du volume à transporter. Ils nécessitent, en effet, une première dépense de matériel et d'installation dont chaque unité cubique serait grevée dans une trop grande mesure si le volume total était trop petit. Quelles que soient d'ailleurs les multiples raisons de convenance locale et d'opportunité qui déterminent, dans chaque cas, le choix entre les divers modes de transport, les règlements de comptes sont faits comme si l'entrepreneur avait adopté réellement, pour chaque masse partielle, le mode qui paraît être le plus économique, d'après les formules du marché.

sion des prix de transport à la distance d, dans les quatre systèmes considérés.

(1)	Brouette.....	$P = pd$
(2)	Tombereau.....	$P_1 = p_1 d + c_1$
(3)	Wagonnet (chevaux)	$P_2 = p_2 d + c_2$
(4)	Wagon (vapeur)...	$P_3 = p_3 d + c_3$

Ces relations linéaires sont représentées (*fig.* 178) par les quatre

Fig. 178.



droites OA, BC, DE, FG, dont la première passe par l'origine.

L'application de chaque véhicule est théoriquement limitée à la distance pour laquelle la formule correspondante et celle du véhicule suivant conduisent à la même dépense de transport par unité de volume. On a donc les distances limites supérieures de la brouette, du tombereau et du wagonnet en exprimant successivement l'égalité des seconds termes des relations (1) et (2), (2) et (3), (3) et (4). On a ainsi :

$$pd = p_1 d + c_1, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{c_1}{p - p_1},$$

$$p_1 d + c_1 = p_2 d + c_2, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{c_2 - c_1}{p_1 - p_2},$$

$$p_2 d + c_2 = p_3 d + c_3, \quad \text{d'où} \quad d = \frac{c_3 - c_2}{p_2 - p_3}.$$

Ces distances limites sont données respectivement, sur la *fig.* 178, par les abscisses des points M, N, P, en chacun desquels la droite d'un véhicule rencontre celle du véhicule suivant. Les parties utiles des quatre droites se réduisent à la ligne polygonale OMNPG.

262. Le procédé graphique précédemment exposé permet de tenir compte des divers prix de transport, dans la détermination de la ligne de compensation et dans le calcul du mouvement des terres On divise, à cet effet, chaque aire de chantier complet en deux ou plusieurs aires partielles, correspondant respectivement aux volumes que leurs distances font classer comme transportables par des véhicules différents. La limite d'application des formules de la brouette et du tombereau étant donnée (*fig.* 178) par l'abscisse $OM_1 = \frac{c_1}{p - p_1}$, on mène (*fig.* 177) à travers chacune des aires en relief et en dépression la sécante horizontale dont la longueur interceptée RS = OM. La mesure du moment de transport à la brouette, dans le chantier UTN, est alors donnée par l'aire RTS comprise entre la droite RS et le sommet T du point de passage. Si la base UN du même chantier est inférieure ou tout au plus égale à la limite d'application du tombereau et du wagonnet, c'est-à-dire (*fig.* 178) à l'abscisse $ON_1 = \frac{c_2 - c_1}{p_1 - p_2}$, l'aire URSN donne la mesure du moment de transport relatif au tombereau. Si, au contraire, UN est plus grand que ON_1, l'aire URSN doit être divisée en deux parties par une nouvelle sécante horizontale $R_1S_1 = ON_1$. Le cube total TF est alors divisé en trois cubes partiels, TE, EE_1, E_1F, transportés respectivement à la brouette, au tombereau et au wagonnet.

263. Supposons que ces trois derniers modes de transport soient seuls à considérer. Désignons par Σb_r la somme des bases de chantiers complets en reliefs, mesurées sur la fondamentale du profil de distribution, dont les longueurs sont plus petites que OM_1 ou tout au plus égales à OM_1, distance limite de la brouette; par Σb_d la somme des bases de chantiers complets en dépression répondant à la même condition; par Σt_r et Σt_d les sommes de bases de chantiers complets, en reliefs et en dépressions, dont les longueurs sont comprises entre OM_1 et ON_1, distance limite du tombereau; par Σw_r et Σw_d les sommes de bases dont les longueurs sont plus grandes que ON_1. (Il est bien entendu que chacune de ces sommes comprend non-seulement les bases du profil de distribution relatives à la ligne proprement dite, mais aussi les bases des aires supplémentaires d'emprunts et de dépôts.) Soient, d'autre part, t'_r, t'_d, w'_r, w'_d les nombres de base de chantiers

en relief ou en dépression qui entrent respectivement dans les sommes Σt_r, Σt_d, Σw_r, Σw_d, relatives aux véhicules dont les formules contiennent les constantes c_1, c_2.

Si l'on déplace la fondamentale, parallèlement à elle-même, d'une quantité infiniment petite dh, la variation de dépense, positive ou négative, qui en résultera, sera égale au produit de dh par

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & p(\pm \Sigma b_r \mp \Sigma b_d) + p_1(\pm \Sigma t_r \mp \Sigma t_d) + c_1(\pm t'_r \mp t'_d) \\ & \qquad + p_2(\pm \Sigma w_r \mp \Sigma w_d) + c_2(\pm w'_r \mp w'_d). \end{aligned} \right.$$

Le minimum de la dépense de transport correspond à la position de la fondamentale par laquelle le déplacement infiniment petit dh ne détermine aucune variation, c'est-à-dire à la position pour laquelle l'expression (1) est égale à zéro.

On calcule aisément, à l'aide de mesures prises sur le profil même, les valeurs de cette expression correspondant à plusieurs fondamentales successives. On construit ensuite, par un procédé analogue à celui du n° 255, la courbe d'erreur qui détermine la position de l'horizontale de compensation.

Si les emprunts ou les dépôts doivent donner lieu à des frais supplémentaires spéciaux, on ajoute à l'expression (1), ou l'on en retranche, les termes q, q_1, qui représentent respectivement le quantum de ces frais par unité de volume empruntée ou déposée. Le déplacement de la fondamentale d'une quantité dh conduit en effet à augmenter ou à diminuer de $dh(q+q_1)$ la dépense spéciale relative aux emprunts et aux dépôts.

CHAPITRE XII.

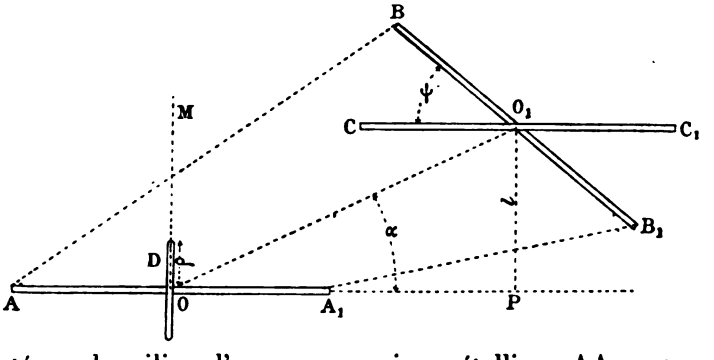
PLANIMÈTRE POLAIRE [1].

CULMANN, *Die graphische Statik*, Zurich, 1875, nos 26, 27. — PEAUCELLIER, *Note sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler, dans le dessin de la fortification.* (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 22, Paris, 1874, p. 134-137.) — HIRN, *Théorie analytique élémentaire du planimètre Amsler*, Paris, 1875. — LAISANT, *Note sur le planimètre polaire de M. Amsler*, Bordeaux, 1876. — WILHELM TINTER, *Ein Beitrag zur Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter.* (*Zeitschrift des œsterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins*, XXIX. Jahrgang, 1877, p. 154-166, 175-192.)

I. — Théorie du planimètre polaire.

263. Un disque D (*fig.* 179), mince et plat, à bords arrondis,

Fig. 179.



monté sur le milieu d'un axe ou essieu métallique AA_1, est assu-

[1] GALILÉE, n'ayant pu déterminer géométriquement l'aire de la cycloïde, eut recours pour l'obtenir à l'expédient de la pesée. Cette première application de *planimétrie mécanique*, tombée pour longtemps en oubli, fut reprise, en 1714, par J.-J. MARINONI, qui la présenta comme sienne dans un volumineux Mémoire intitulé : *De re technometrica veteri ac nova. Recensentur experimenta per utramque habita. Accedunt modi areas fundorum sine calculo investigandi.* Opus posthumum; Viennæ Austriæ, MDCCLXXV. Les aires, découpées dans des plaques métalliques laminées, étaient

jetti à rouler sur un plan auquel l'essieu reste toujours parallèle. Si le mouvement a lieu dans la direction OM, perpendiculaire à

---

pesées à une balance que MARINONI appelait *libra planimetrica*. Mais le procédé n'eut pas une meilleure fortune sous cette nouvelle dénomination, et la planimétrie mécanique prit une autre direction, grâce au *réseau à calculer* d'HOGREFE. Cet instrument consiste en un châssis, aux montants duquel sont fixés deux cours de fils équidistants qui forment un quadrillé rectangulaire. L'intervalle entre deux fils consécutifs représentant à l'échelle l'unité linéaire, chaque compartiment élémentaire du réseau est un carré qui correspond à l'unité superficielle. Si l'on superpose le réseau ainsi construit à une figure plane quelconque, on voit immédiatement combien de carrés élémentaires sont compris, en tout ou en partie, dans les limites de cette figure, et l'on en déduit la mesure approximative de sa surface. Il est difficile de préciser l'époque à laquelle cet instrument a été imaginé. On en trouve la première mention dans l'Ouvrage de BÖHM : *Anleitung zur Messkunst auf dem Felde*, 1808. On a proposé, au même moment, une plaque rectangulaire transparente sur laquelle étaient marquées, parallèlement aux directions des bords, deux séries de droites dont l'équidistance, égale à l'unité linéaire de l'échelle adoptée, était le côté d'un compartiment élémentaire carré, qui représentait l'unité de surface. Il faut rattacher à ce principe commun du *réseau* et de la *plaque* l'instrument beaucoup plus perfectionné qui valut, en 1824, à son auteur GAETANO CAIRO, une médaille d'or de l'Institut lombard.

C'est vers la fin de la même année 1824 que fut construit, sur un principe nouveau, un appareil qui devait supplanter tous les précédents, parce qu'il pouvait satisfaire aux exigences les plus minutieuses. Nous voulons parler du *planimètre* de TITO GONNELLA. Après avoir donné lieu au rapport très favorable d'une Commission spéciale, il fit le sujet d'un Mémoire publié sous ce titre : *Teoria e descrizione d'una macchina colla quale si quadrano le superficie piane* (*Planimetro* GONNELLA) dans l'*Antologia*, avril, mai et juin 1825, t. XVIII, Florence, imp. Pezzati. Cette date de 1825 assure la priorité à GONNELLA sur tous les inventeurs d'instruments analogues, et, en particulier, sur ERNST et OPPIKOFER, à qui l'on avait longtemps attribué l'idée première du planimètre. Les droits de GONNELLA ont été d'ailleurs amplement reconnus, non seulement en Italie, mais aussi en France. (Voir *Rapport fait à la Commission française du jury international de l'Exposition universelle de Londres, sur les instruments de Mathématique et de Physique*, etc., par M. MATHIEU. Paris, imprimerie impériale, 1855.) Toutefois, ainsi qu'il arrive souvent pour les inventions qui répondent à un besoin véritable, l'idée d'un appareil sommateur avait pris naissance, presque au même moment, sous diverses formes et en différents pays. En 1829, CORIOLIS construisait un *dynamomètre à compteur*, dont la roulette portait sur un cône fonctionnant à la manière d'une suite d'engrenages à variation continue. Cet appareil donnait la somme des produits des efforts élémentaires par les périodes de temps durant lesquelles ces efforts étaient respectivement développés. (*Bulletin de la Société d'Encouragement*, 1829, p. 477.) PONCELET arrivait au même résultat avec sa *machine à intégrer*; le compteur se mouvait sur un disque tournant qui n'était qu'un cas particulier du cône de CORIOLIS. L'illustre géomètre avait ainsi retrouvé, sans le savoir, la solution déjà donnée par GONNELLA. Un peu plus tard, M. LALANNE, qui avait déjà imaginé une *balance arithmétique*, proposait son *arithmoplanimètre* bien connu. (*Mémoire sur l'arithmoplanimètre, machine arithmétique et géométrique*, etc., par LÉON LALANNE. Paris, 1840.)

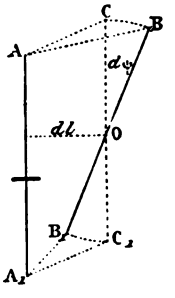
Il serait hors de propos d'énumérer ici toute la suite des inventions plus récentes

a position primitive de l'axe, le disque roule sans glissement, et a distance OM, parcourue en ligne droite, est égale au produit de a circonférence du disque par le nombre de tours qu'il effectue. Si, au contraire, l'axe est déplacé suivant sa propre direction OP, e disque suit ce mouvement, mais il glisse sans rouler. Enfin, si 'on fait avancer l'axe parallèlement à lui-même, dans une direction oblique OO_1, comprise entre les deux directions rectangulaires précédemment considérées, le disque roule et glisse simultanément et tout se passe comme s'il avait glissé de O en P et roulé de P en O_1. Le produit de la circonférence du disque par le nombre de tours effectués est donc égal à $PO_1 = l$. L'aire AA_1C_1C, décrite par l'axe, a, dès lors, pour expression

$$AA_1 . PO_1 = AA_1 . 2\pi\rho n = AA_1 . OO_1 \sin\alpha,$$

ρ étant le rayon du disque, n le nombre entier ou fractionnaire de tours effectués pendant le déplacement de OO_1.

Fig. 180.



264. Supposons maintenant que l'axe n'est plus assujetti à se déplacer parallèlement à lui-même et soient AA_1, BB_1 (*fig.* 180) deux de ses positions infiniment voisines. On peut admettre qu'il est passé de l'une à l'autre en se déplaçant d'abord parallèlement

---

du même ordre. Nous ajouterons cependant que le *planimètre orthogonal* de Gonnella, et les nombreux appareils qui se rattachent à ce type doivent être considérés comme supplantés désormais, au moins en ce qui touche les applications courantes, par les *planimètres polaires*, dont la première disposition a été donnée par le professeur Jacob Amsler Laffon, de Schaffouse. (*Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes*, etc., von Jakob Amsler, Schaffausen, A. Beck und Sohn, 1856.) Cet instrument, dont le général russe J. Strelbitsky a récemment fait une application remarquable (*Superficie d'Europe établie par* J. Strelbitsky, Saint-Pétersbourg, imp. Frenke et Fusnot, 1882), a été l'objet de nombreux perfectionnements, dont quelques-uns sont dus à l'inventeur lui-même. Nous nous bornerons à signaler les deux nouveaux types qu'Amsler a envoyés à l'exposition de Zurich. L'un est à disque (*Scheibenplanimeter*); l'autre est disposé spécialement pour le calcul des figures sphériques. Ces deux types, et un troisième plus récent, à calotte sphérique (*Kugelplanimeter*), ont été décrits par l'inventeur dans une Note intitulée : *Neuere Planimeterconstructionen* (*Zeitschrift für Instrumentenkunde*, Jahrgang 1884, Heft 1, p. 11-28.)

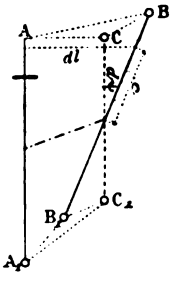
Voir, pour plus de détails sur l'histoire et la bibliographie des instruments planimétriques : *Beiträge zur Geschichte der Planimeter*, von Dr Antonio Favaro. Wien, Druck und Verlag von R. V. Waldheim, 1873.

à lui-même de la quantité dl, pour occuper la position C, C_1, et en pivotant ensuite sur son point milieu O de la quantité angulaire $d\psi$. Les secteurs OBC, OB_1C_1 étant égaux, on voit que l'aire AA_1B_1B, effectivement décrite, est égale à l'aire AA_1C_1C diminuée de la somme des aires des triangles mixtilignes ABC, $A_1B_1C_1$. Mais toutes les dimensions de ces triangles sont infiniment petites, comme dl et $d\psi$. Leurs aires sont donc des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au premier, c'est-à-dire des quantités négligeables par rapport à l'aire du parallélogramme AA_1C_1C, qui est le produit de dl par la quantité finie AA_1. Donc, l'aire du quadrangle AA_1B_1B est égale à $AA_1 . dl$.

De même, pour un déplacement fini, décomposable (*fig.* 179) en une première translation sans roulement, OP, en une seconde translation $PO_1 = l$, accusée par le roulement du disque, et en une rotation ψ, durant laquelle le disque pivote sur l'un de ses points, sans rouler ni glisser, l'aire décrite AA_1B_1B est égale au produit de la longueur de la tige par la distance $l = 2\pi\rho n$.

265. Nous avons supposé jusqu'ici que le disque était fixé exactement au milieu de l'axe. Si on le déplace (*fig.* 181) de la quantité c, vers l'extrémité B pour laquelle la rotation $d\psi$ s'effectue dans le sens positif et détermine une rotation positive du disque, on aura le chemin total dl parcouru par le disque en ajoutant à la distance comprise entre les parallèles AA_1, CC_1 l'arc $c\,d\psi$ décrit par le disque pendant que l'axe passe de la position CC_1 à la position BB_1. Ce chemin total, accusé par le nombre de tours que le disque aura effectués, étant supérieur de $c\,d\psi$ (**264**) à la distance qui doit entrer comme facteur dans le calcul de l'aire AA_1B_1B, on a, comme expression de cette aire différentielle,

Fig. 181.



$$dS = AA_1(dl - c\,d\psi),$$

soit, pour un déplacement fini et en désignant par a la longueur de l'axe,

$$S = a(l - c\psi).$$

Si la rotation de l'axe, pour passer de CC_1 en BB_1, avait lieu dans

le sens négatif, ou si, la rotation de l'axe ayant lieu dans le sens positif, le disque était fixé à la distance c du milieu, mais vers l'extrémité B_1, le chemin $c\psi$ devrait être ajouté et l'on aurait

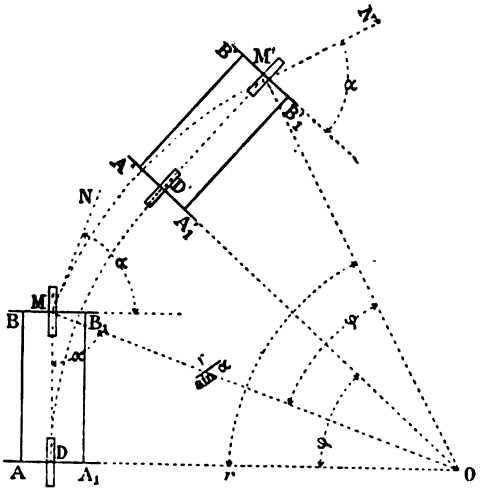
$$S = a(l + c\psi).$$

Dans ces formules, l représente toujours le chemin total mesuré par la rotation du disque et ψ l'angle formé par les deux positions extrêmes de l'axe.

266. Nous avons admis jusqu'ici que l'axe AA_1 passait par le centre du disque. Mais cette condition n'est pas nécessaire et les résultats donnés par l'instrument ne seront pas modifiés si le disque est monté sur un autre axe, pourvu que les deux axes soient parallèles et invariablement liés l'un à l'autre.

Considérons, en effet, un disque D (*fig.* 182) assujetti à se

Fig. 182.



mouvoir sur une circonférence de rayon $OD = r$, de telle sorte que la projection normale de l'axe AA_1 sur le plan de roulement passe toujours par le centre O.

Supposons qu'un second disque M, situé dans le même plan que D, soit monté sur un axe BB_1 rattaché à AA_1 par un châssis rigide. Si l'on fait pivoter le système autour du centre O d'une

quantité angulaire φ, les disques D et M décrivent respectivement les chemins DD′ et MM′. L'axe AA_1 étant constamment perpendiculaire à la direction du mouvement, le nombre de tours effectués par le disque D accusera le chemin effectivement décrit $DD' = r\varphi$. L'axe BB_1 faisant constamment avec la direction du mouvement, c'est-à-dire avec la tangente MN, un angle $\alpha = OMD$, on sait (263) que le nombre de tours effectués par le disque M n'accusera plus, dans ce cas, le chemin effectivement décrit MM′, mais seulement le chemin $MM' \sin\alpha$. Or

$$MM' = \frac{r\varphi}{\sin\alpha};$$

donc

$$MM' \sin\alpha = r\varphi = DD';$$

d'où il suit que les disques D et M donneront exactement les mêmes indications.

Le raisonnement que nous avons fait dans le cas d'un déplacement circulaire s'étend aux cas de déplacement suivant des courbes quelconques, car on peut toujours considérer un arc de courbe infiniment petit comme un arc de cercle.

267. Le disque peut tourner dans les deux sens. Si l'axe AA_1, après avoir décrit une aire, la décrit de nouveau d'un mouvement rétrograde, le disque effectue dans un certain sens, pendant ce second mouvement, autant de tours qu'il en avait effectué en sens opposé pendant le premier; en sorte que l'aire, ainsi parcourue deux fois, est sans influence sur le chemin accusé par la rotation du disque. Si l'axe parcourt une aire S, m fois dans un sens et n fois dans le sens opposé, le disque effectue m fois dans un sens et n fois dans l'autre le nombre de tours nécessaire pour décrire une seule fois l'aire considérée, et l'on a

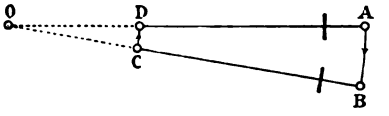
$$S = \frac{a(l - c\psi)}{m - n}.$$

Il est donc indispensable de connaître le sens dans lequel le disque tourne pendant que l'axe se déplace. La figure ne gardant aucune trace de ce déplacement, le sens de rotation du disque ne peut se déduire que du sens dans lequel le périmètre de l'aire est parcouru par les extrémités de l'axe. Cette indication sera d'ail-

leurs suffisante si l'on tient compte des règles précédemment données (Chap. IV, § Ier) sur la relation à établir entre le signe d'une aire et le sens dans lequel son périmètre est parcouru.

Soit, par exemple, ABCD (*fig.* 183) l'élément superficiel que

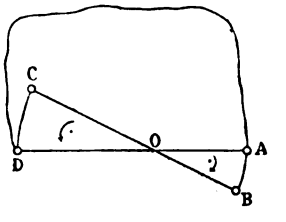
Fig. 183.



décrit l'axe du disque quand il passe de la position AD à la position infiniment voisine BC. Cet élément peut être considéré comme égal à la différence des deux triangles OAB, ODC qui ont leur sommet commun O à l'intersection des deux positions considérées. On devra donc, pour établir une relation entre le signe de l'aire et le sens dans lequel les arcs AB et DC sont parcourus, affecter à ces arcs des signes contraires, c'est-à-dire placer des flèches de sens opposés sur les chemins AB, DC, respectivement décrits par les extrémités A, D de l'axe. Il suffit alors de prolonger ces flèches sur les segments qui marquent les positions extrêmes de l'axe pour reconnaître que, conformément aux conventions sur les signes rappelées plus haut, le périmètre d'un élément superficiel positif ABCD est parcouru dans un certain sens et le périmètre d'un élément négatif OCD, dans le sens contraire.

La même relation se vérifie évidemment lorsque le point O est sur l'axe même (*fig.* 184). L'aire de la figure décrite est alors augmentée de l'élément positif OAB et diminuée de l'élément négatif OCD.

Fig. 184.

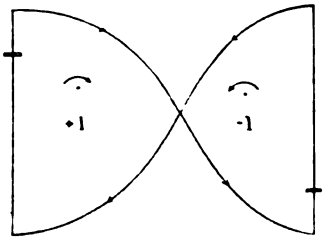


La règle, établie par une aire infiniment petite, ne change pas lorsque, par suite d'un nouveau déplacement infiniment petit de l'axe, un nouvel élément superficiel vient s'ajouter au précédent. D'où il suit que les aires finies, aussi bien que leurs éléments, doivent être considérées comme décrites dans le sens positif ou dans le sens négatif, c'est-à-dire comme positives ou négatives, selon que les flèches marquées sur leurs périmètres sont dirigées dans l'un ou l'autre sens.

Nous compléterons ces explications par quelques exemples

268. Dans le circuit entrelacé de la *fig.* 185, les deux aires par-

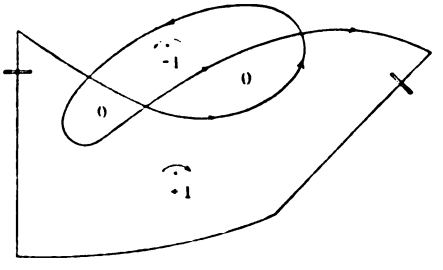
Fig. 185.



tielles, de signes contraires, délimitées par des contours de sens opposés, sont effectivement parcourues en sens opposés, ainsi qu'on le voit par les flèches indicatrices des directions suivant lesquelles le disque se déplace.

Dans la *fig.* 186, les aires marquées + 1 et — 1 sont décrites

Fig. 186

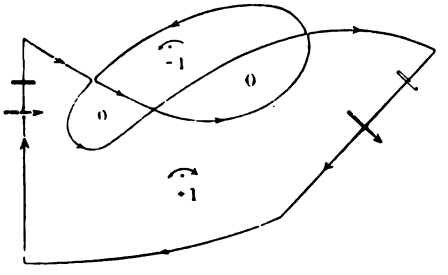


en sens inverses et les aires marquées 0 sont décrites une fois dans chaque sens; en sorte qu'elles sont sans influence sur la somme algébrique des chemins, accusée par la rotation tantôt positive, tantôt négative du disque. Cette somme est donc proportionnelle à la différence des aires + 1 et — 1.

Les positions extrêmes de l'axe et les chemins parcourus d'un mouvement continu par ses extrémités forment une figure fermée dont le circuit, s'il est entrelacé, peut toujours être décompos en plusieurs circuits simples. Chacun de ces circuits simple décrit dans un seul et même sens, délimite une aire partie qui est affectée, dans toute son étendue, d'un seul et même sig

(80). On voit un exemple de cette décomposition dans la *fig.* 187, qui reproduit exactement la *fig.* 186, avec cette seule différence

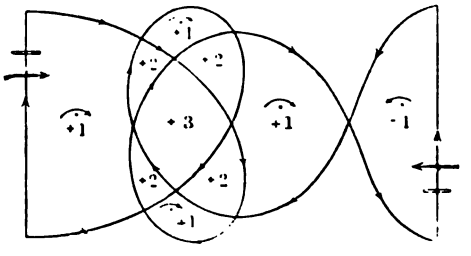
Fig. 187.



qu'on a détaché et arrondi les sommets d'angles formés par les entrecroisements du circuit.

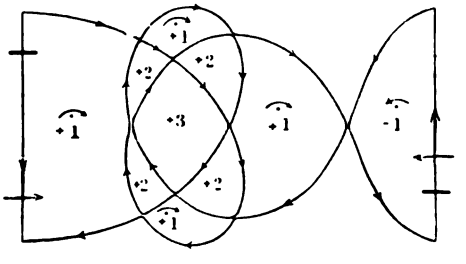
269. Si, dans un circuit entrelacé, tel que celui de la *fig.* 188,

Fig. 188.



on arrondit les sommets d'angles des nœuds, de façon à isoler les circuits simples partiels (*fig.* 189), on vérifie que tout circuit

Fig. 189.



simple, décrit n fois, est entièrement compris dans un autre circuit simple décrit $n - 1$ fois (85). On voit aussi que les aires délimi-

tées par des circuits simples de signes contraires sont complètement séparées. Dans les figures considérées, le chemin décrit par le disque est proportionnel à l'aire exprimée par la formule

$$1.(+1)+2.(+2)+3.(+3)-1.(-1),$$

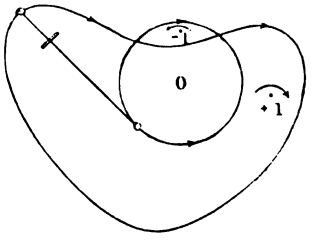
dans laquelle les notations $(+1)$, (-1),... désignent chacune des aires partielles, affectée de son signe.

270. On peut, d'après ce qui précède, déterminer immédiatement le coefficient $\pm n$ d'un circuit simple, c'est-à-dire reconnaître le nombre de fois que ce circuit est décrit dans l'un ou l'autre sens. Il suffit (86) de mener, à partir d'un point pris à l'intérieur du circuit partiel considéré, un segment de droite dont la seconde extrémité soit à l'extérieur de la figure complète sur laquelle on opère et de compter, en observant la direction des flèches, le nombre des intersections positives et négatives (84) du segment et du circuit total de la figure.

Dans la *fig.* 189, par exemple, le segment, issu d'un point de l'aire marquée $+3$ et dirigé vers la droite, donne lieu à quatre intersections positives et à une intersection négative; d'où il suit que le circuit partiel à l'intérieur duquel le segment a son origine doit être affecté du coefficient $+4-1=+3$. On arriverait au même résultat en prolongeant le segment à gauche de la figure et en vérifiant qu'il donne lieu de ce côté à trois intersections positives.

Il est à peine utile d'ajouter que l'aire partielle circonscrite par chaque contour simple intervient avec son coefficient propre dans la somme algébrique d'aires qui donne la superficie totale de la figure.

Fig. 190.



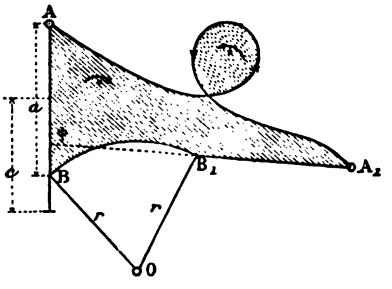
271. Lorsqu'on ramène l'axe du planimètre à sa position initiale, chacune de ses extrémités a décrit une courbe fermée et l'on peut indifféremment considérer les deux courbes comme des figures distinctes ou comme les éléments partiels d'une même figure complète. Dans la *fig.* 190, par exemple, on peut dire à volonté que le chemin accusé par le rou-

lement du disque est proportionnel à la différence des aires $(+1)$ et (-1) ou à la différence des aires circonscrites respectivement par la courbe en forme de cœur et par le cercle.

II. — Application du planimètre à la mesure des aires.

272. Dans le planimètre pratique, tel qu'Amsler l'a disposé, l'axe $BA = a$ (*fig.* 191) est muni à son extrémité A d'une pointe

Fig. 191.

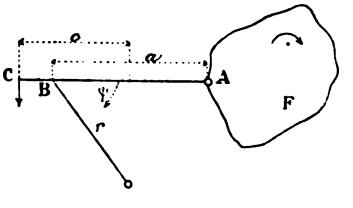


traçante que l'on assujettit à décrire le périmètre des figures. L'extrémité B est assemblée à charnière avec une tige $OB = r$, mobile autour du point O qu'une seconde pointe permet de fixer sur le plan dans une position quelconque. Le disque est monté sur le prolongement de la tige AB, à la distance c du milieu de AB. Il transmet ses mouvements à un compteur sur lequel on peut lire à chaque instant la différence, positive ou négative, entre le nombre de rotations effectuées dans chacun des deux sens. Le point O étant fixe, l'extrémité B de l'axe se déplacera sur une circonférence de rayon r pendant que l'extrémité A décrira le périmètre de l'aire à calculer et la différence des aires $(+1)$ et (-1) sera (**265**)

$$S = a(l + c\psi),$$

car c est ici négatif.

Fig. 192.



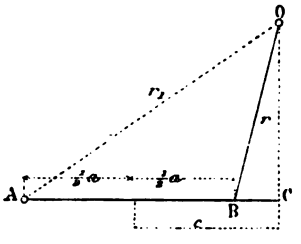
Si, après avoir fait parcourir à l'extrémité A le contour entier de l'aire F à mesurer (*fig.* 192), on ramène les extrémités A et B à leurs positions primitives, elles auront décrit respectivement des

contours fermés dont l'un, celui du point B, a pour coefficient o, puisque B a parcouru deux fois et en sens opposés un arc circulaire de rayon r. L'angle ψ, décrit par l'axe, est d'ailleurs lui-même égal à zéro; d'où il suit que l'aire décrite par la pointe A est égale à al.

Le planimètre est, sous cette forme, un instrument propre à réduire les aires à une base constante a.

273. Nous avons supposé que le centre fixe O restait extérieur à la figure F. S'il était intérieur (*fig.* 190), on aurait $\psi = 2\pi$. Par suite, A désignant toujours l'aire totale dont l'extrémité A décrit le contour, l'aire décrite par l'axe serait

Fig. 193.



$$A - \pi r^2 = a(l + 2c\pi),$$

d'où

$$A = al + \pi(r^2 + 2ac).$$

Supposons l'axe AB dans une position telle que la droite OC, passant par le centre fixe O et par le centre du disque, soit perpendiculaire à AB (*fig.* 193). Si nous désignons alors la distance OA par r_1, nous aurons

$$r_1^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2$$

et

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BC}^2;$$

d'où

$$r_1^2 = (c + \tfrac{1}{2}a)^2 + r^2 - (c - \tfrac{1}{2}a)^2 = r^2 + 2ac;$$

donc

$$A = al + \pi r_1^2.$$

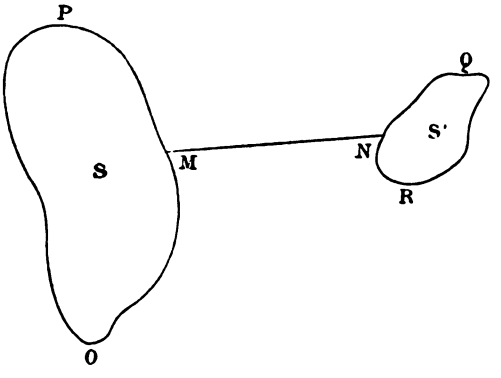
Si l'on décrivait avec la pointe A un cercle de rayon r_1, il est évident que le disque ne tournerait pas. On aurait, dans ce cas, $l = 0$ et $A = \pi r_1^2$.

274. Le planimètre polaire permet d'atteindre, dans la mesure des aires planes, une approximation qui excède presque toujours celle dont on a besoin dans la pratique. Un opérateur habile à manier cet instrument dépasse, dans la détermination des aires à contours irréguliers, le degré d'exactitude auquel conduisent la

plupart des formules proposées jusqu'ici pour la quadrature des surfaces [1].

275. On peut, par une seule opération du planimètre, ajouter entre elles deux ou plusieurs aires. S'il s'agit, par exemple, d'avoir la somme des aires S et S′ (*fig.* 194), on réunit par une ligne auxiliaire MN deux points quelconques de leurs contours, et l'on suit le parcours MOPMNQRNM. Les rotations du disque relatives

Fig. 194.



aux chemins opposés MN, NM s'annulent et l'indication finale sur le compteur correspond à S + S′.

Si l'on décrit le périmètre de S′ en sens opposé, c'est-à-dire

---

[1] M. le général Peaucellier (*loc. cit.*) avait donné les résultats comparatifs suivants pour $\frac{1}{4}$ de cercle de $0^m,10$ de rayon, divisé en dix segments par des ordonnées parallèles :

	Aires.	Erreurs.
Méthode des cordes	77,611	0,929
Méthode de Thomas Simpson	78,173	0,367
Méthode des tangentes	78,809	0,269
Méthode du général Poncelet	78,403	0,137
Méthode du général Parmentier	78,763	0,223
Indication moyenne du planimètre	78,655	0,115
Mesure exacte	78,540	

M. le général Parmentier (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, Bruxelles, 1879, p. 167) a montré que deux des résultats précédents devaient être ainsi rétablis :

	Aires.	Erreurs.
Méthode Poncelet	78,221	0,319
Méthode Parmentier	78,580	0,040

suivant NRQ, l'instrument fournit, non plus la somme, mais la différence S — S′ des deux aires.

III. — Applications diverses.

276. On peut supposer que, dans l'une quelconque des formules connues de quadrature, dans celle de M. le général Parmentier par exemple (**235**), les ordonnées h_0, h_1, ..., au lieu de figurer des longueurs, représentent les aires de sections faites dans un solide irrégulier quelconque par des plans parallèles équidistants assez rapprochés. La formule donne alors le volume du solide compris entre les sections extrêmes et deux opérations du planimètre suffisent pour déterminer, d'une part Σh_i, d'autre part $h_0 + h_{n+1} - h_1 - h_n$.

L'application de ce procédé de cubature est surtout avantageuse lorsque le solide à mesurer est représenté sur un plan coté par des courbes de niveau équidistantes.

277. L'expression

$$A = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

peut être considérée comme représentant deux fois la somme des aires des triangles qui ont respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour bases et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour hauteurs.

Prenons sur deux axes rectangulaires, en tenant compte des signes, d'une part, $OX_1 = x_1$, $OX_2 = x_2$, ..., d'autre part, $OY_1 = y_1$, $OY_2 = y_2$, ..., complétons les triangles OX_1Y_1, OX_2Y_2, ..., et décrivons, avec la pointe A du planimètre, le circuit $OY_1X_1OY_2 \ldots Y_nX_nO$. L'aire accusée par l'instrument sera égale à $\frac{A}{2}$.

278. Soient respectivement x_1 et y_1, x_2 et y_2, ..., x_n et y_n les coordonnées des n sommets d'un polygone plan, rapporté à deux axes rectangulaires. L'aire de ce polygone est

$$A = x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \ldots + x_n y_1 - y_n x_1.$$

En appliquant à cette somme le procédé du numéro précédent, on obtiendra, par le planimètre, l'aire du polygone proposé, sans avoir à le construire.

APPENDICE DU TRADUCTEUR AU CHAPITRE XII.

INTÉGRATION GRAPHIQUE [1].

I. — Préliminaires et définitions.

279. Si l'on porte en abscisses et en ordonnées, relativement à deux axes que nous supposons rectangulaires, des séries de grandeurs linéaires respectivement proportionnelles aux couples de valeurs correspondantes de x et de y dans la fonction $y = f(x)$, on obtient une courbe plane c qui est la représentation graphique de la fonction proposée (96).

L'intégrale $y_1 = \int f(x)\,dx$ de cette fonction est une nouvelle relation entre deux variables, qu'on peut représenter, en adoptant les mêmes échelles de coordonnées, par une seconde courbe c_1 rapportée aux mêmes axes.

Le problème de l'intégration graphique consiste à construire la courbe intégrale c_1 quand on connaît la courbe primitive c.

La courbe intégrale obtenue par une première construction peut d'ailleurs être prise à son tour comme courbe primitive d'une intégration graphique donnant pour résultat une nouvelle courbe c_2, intégrale seconde de c; et ainsi de suite.

280. L'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ peut toujours être considérée comme exprimant l'aire du trapèze mixtiligne délimité par l'axe des ab-

[1] Voir J. Massau, *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications; développement des thèses présentées au concours universitaire de* 1873-1874. Extrait des *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, Livres I et II, Bruxelles, 1878, et Livre III, Liège, 1884. — Charles Saviotti, *Note sur les méthodes graphiques d'intégration*, dans la *Revue universelle des Mines*, etc., t. XIII, 2e série, 1883, p. 483. Une première publication de cette Note a été faite dans le *Giornale del Genio civile*, XXe année, n° 3, Rome, mars 1882, p. 172-193.

scisses, par les ordonnées aux distances x_0, x_1 de l'origine et par la courbe dont l'ordonnée, correspondant à l'abscisse variable x, est égale à $f(x)$. En d'autres termes, l'aire engendrée par les ordonnées de la courbe primitive c est donnée par la courbe intégrale première c_1. On donne à cette aire le nom de *diagramme*.

L'*ordonnée moyenne* du diagramme est la hauteur du rectangle équivalent qui a la même base $x_1 - x_0$.

On nomme *élément* du diagramme tout trapèze partiel compris entre la courbe c, l'axe des abscisses et deux ordonnées assez rapprochées pour que l'arc de courbe qu'elles interceptent puisse être considéré comme se confondant sensiblement avec sa corde.

On peut dès lors, sans erreur sensible, prendre comme ordonnée moyenne d'un élément la moyenne de ses ordonnées extrêmes.

L'*intégrale graphique* d'un diagramme (indépendamment de la constante arbitraire) est la mesure de ce diagramme, rapportée à une base de réduction donnée b (87).

La *différentielle graphique* d'un diagramme est la mesure d'un élément, rapportée à la base b.

L'intégrale graphique d'un diagramme est égale à la somme de ses différentielles graphiques.

II. — Ponctuelle intégrale.

281. Soit OABC (*fig.* 195) un diagramme divisé en *éléments* à bases très petites, Δx, par les ordonnées menées aux points 1, 2, 3, ... de l'axe des abscisses. Projetons l'une de ces bases, 34, d'un point P situé à la distance b de OX et, par un point 4', pris arbitrairement sur la parallèle 44' à OX, passant par l'extrémité de l'*ordonnée moyenne* de l'élément considéré, menons aux rayons projetants P3, P4 les parallèles 4'G, 4'H qui détachent sur l'axe des x un petit segment GH $= \Delta z$. On a, par les triangles semblables P34, 4'GH,

$$y \,.\, \Delta x = b \,.\, \Delta z,$$

Δz étant, d'après une précédente définition, la différentielle graphique du diagramme, rapportée à la base b.

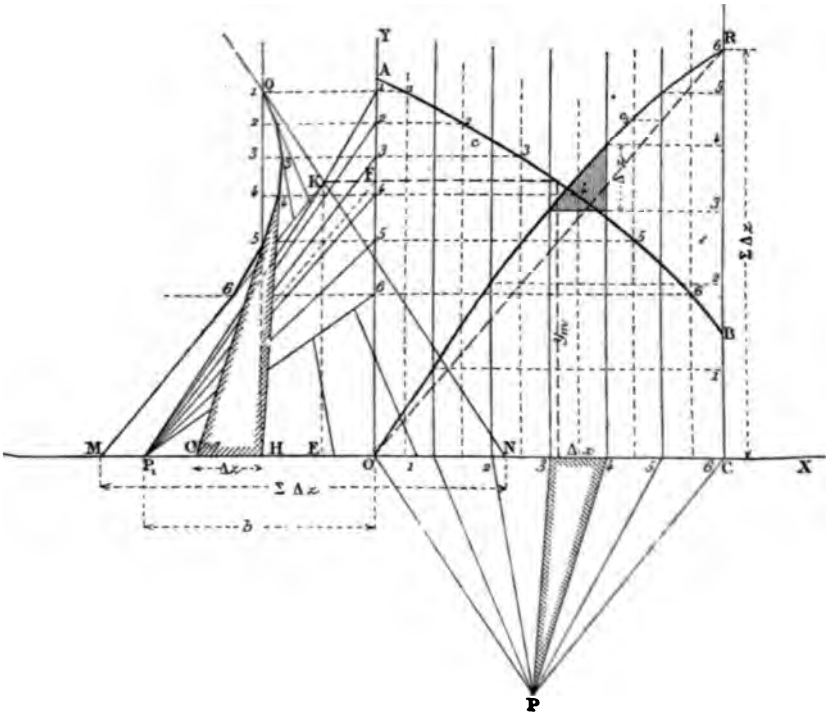
On a, par suite,

$$\Sigma y \, \Delta x = b \,.\, \Sigma \Delta z.$$

On obtient $\Sigma \Delta z$, intégrale graphique approchée du diagramme, par une construction analogue à celle du n° 23. On projette du centre P la ponctuelle O 1 2 3 ... C; on projette parallèlement à OX, sur l'axe OY ou

sur une parallèle à cet axe, les extrémités 1, 2, 3, ... des ordonnées moyennes des *éléments* et l'on construit le *polygone de multiplication* QM, relatif au faisceau P. Les couples de côtés consécutifs de ce polygone interceptent sur OX la suite ininterrompue des différentielles graphiques du diagramme. Les côtés extrêmes QN, 6M détachent conséquemment, sur

Fig. 195.



l'axe des abscisses, un segment MN $= \Sigma \Delta z$ qui est l'intégrale graphique du diagramme, rapportée à la base b.

Ces côtés extrêmes se coupent en un point K dont la distance EK à l'axe des abscisses représente l'ordonnée moyenne y_m du diagramme. On a, en effet, par les triangles semblables MKN, OPC :

$$EK . OC = b . MN,$$

d'où

$$EK = \frac{b \Sigma \Delta z}{\Sigma \Delta x} = y_m.$$

III. — Polygone inscrit à la courbe intégrale.

282. La construction précédente a donné la fonction intégrale sous la forme d'une ponctuelle MN. On peut aussi l'obtenir sous la forme d'un nouveau diagramme, par un mode de construction déjà indiqué et appliqué (94 et 250 à 257).

On projette sur l'axe des y, parallèlement à celui des x, les extrémités des ordonnées moyennes des éléments. On projette ensuite la ponctuelle ainsi obtenue du centre P_1, situé sur l'axe des x, à la distance b de l'axe des y. On trace enfin, entre les couples d'ordonnées consécutives des éléments, la ligne polygonale OR, relative au faisceau P_1. Une ordonnée quelconque de cette ligne est la mesure, rapportée à la base b, c'est-à-dire l'intégrale graphique, de la partie du diagramme donné comprise entre l'origine et l'ordonnée que l'on considère. En particulier, la dernière ordonnée CR est l'intégrale du diagramme OABC.

Si l'on considère, en effet, d'une part l'un quelconque, P_1O4, des triangles formés par les deux axes et par un rayon du faisceau P_1, d'autre part le triangle, semblable au précédent, formé par le côté de OR parallèle à P_14, par l'ordonnée 4 et par la parallèle à OX menée à l'extrémité de l'ordonnée 3 de OR, on a, en désignant par y_e l'ordonnée moyenne de l'élément dont ce dernier triangle fait partie,

$$y_e \Delta x = b \Delta z. \tag{1}$$

La différence Δz entre les ordonnées extrêmes de l'élément considéré est donc la mesure de cet élément rapportée à la base b, c'est-à-dire (280) la différentielle du diagramme donné, et l'intégrale de ce diagramme est

$$\Sigma \Delta z = \mathrm{CR}.$$

La ligne OR, lieu des extrémités des ordonnées intégrales, et l'aire ORC, lieu de ces ordonnées, sont respectivement la *ligne intégrale* et le *diagramme intégral* du diagramme OABC.

L'ordonnée moyenne y_m du diagramme primitif est limitée à la parallèle à l'axe des x qui passe par le point d'intersection de l'axe des y et du rayon de P_1 parallèle à la droite OR. On a, en effet, par les triangles semblables,

$$\mathrm{OF}.\mathrm{OC} = b.\mathrm{CR},$$

d'où

$$\mathrm{OF} = y_m.$$

Cette construction et celle du n° 281 doivent nécessairement conduire au même résultat quand on adopte la même base b. On vérifie, en effet, que les segments NM et CR sont égaux, et, plus généralement, que la ponctuelle

déterminée sur OX par les côtés de la ligne polygonale QM est égale à la ponctuelle déterminée par la projection sur CR des ordonnées du diagramme intégral.

On déduira donc la ligne OR de la ponctuelle intégrale NM, fournie par la construction du n° 281, en portant sur les ordonnées 0, 1, 2, 3, ..., C les intégrales partielles correspondantes représentées par les segments compris entre l'origine commune N et les points de division successifs de la ponctuelle NM.

IV. — Intégrations successives.

283. La fonction intégrale obtenue sous la forme d'une ponctuelle NM (281) ou d'une ligne polygonale OR (282) conduit, par l'une ou l'autre méthode, à la détermination de l'intégrale seconde de AB.

Dans le cas du n° 281, par exemple, on fait pivoter la ponctuelle NM sur le point N, jusqu'à la direction parallèle à CR; on projette ensuite les points milieux de ses segments au moyen de rayons parallèles à OX, qu'on relie par un polygone de multiplication relatif au faisceau P. Les côtés de ce polygone déterminent sur OX une nouvelle suite de différentielles dont la somme, comprise entre le premier et le dernier côté du polygone, est l'intégrale seconde cherchée. On procède de même pour l'intégrale troisième, et ainsi de suite.

V. — Ponctuelles et lignes dérivées.

284. Une opération inverse permet de dériver de la ligne intégrale OR le diagramme primitif limité par AB. On projette à cet effet la ponctuelle 0 1 2 3 ... C du pôle P et l'on mène, par les points de division de la ponctuelle intégrale NM, des droites parallèles aux rayons correspondants du faisceau P. Les sommets de la ligne polygonale QM, formée par ces droites, appartiennent aux parallèles à OX qui déterminent respectivement les ordonnées moyennes des éléments du diagramme primitif.

La méthode du n° 282 donne lieu à une inversion analogue. On projette du point P_1 sur OY, au moyen de rayons parallèles aux côtés élémentaires de OR, la ponctuelle 1 2 3 ..., dont les points de division sont sur les parallèles à OX qui coupent respectivement les ordonnées moyennes correspondantes en des points de la ligne AB, *dérivée* de OR.

VI. — Polygone circonscrit à la courbe intégrale.

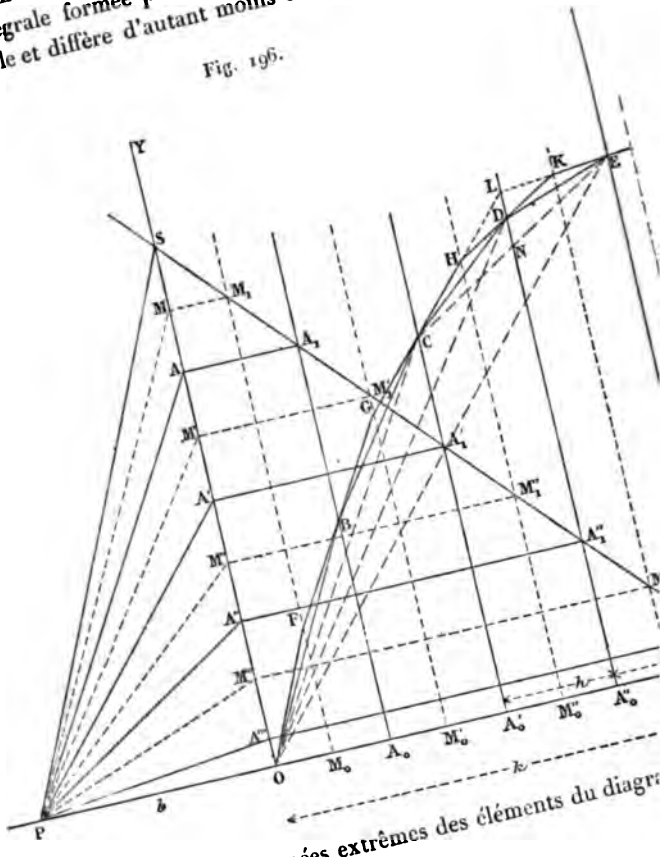
285. La relation (1) du n° 282, mise sous la forme

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{y_m}{b},$$

ontre que les coefficients angulaires des petits segments rectilignes dont suite constitue la ligne intégrale d'un diagramme donné sont respective- ient proportionnels aux ordonnées moyennes des éléments correspon- lants du diagramme.

La ligne intégrale formée par ces segments est un polygone inscrit à la courbe intégrale et diffère d'autant moins de cette courbe qu'on a rappro-

Fig. 196.



ché davantage les ordonnées extrêmes des éléments du diagr

A la limite, on a $$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{b},$$

y étant l'ordonnée d'un point de la courbe intégrale et $\frac{dz}{dx}$ le laire de la tangente à la courbe en ce point. Conséquem sur l'axe OY (*fig.* 196) non plus les ordonnées éments d'un diagramme primitif OST

extrêmes OS, A_0A_1, $A'_0A'_1$, ... de ces éléments, on obtient, non plus la ligne polygonale inscrite OBCDE ..., relative au faisceau P(MM'M''...), mais la ligne polygonale circonscrite OFGHK ..., relative au faisceau P(SAA'...). On arrête la première tangente OF, parallèle au rayon PS, à son point F d'intersection avec l'ordonnée moyenne du premier trapèze élémentaire; par le point F on mène FG, parallèle au rayon PA; par le point G, GH parallèle au rayon PA', et ainsi de suite. Les droites FG, GH, ... sont les tangentes à la courbe intégrale aux points B, G, ...

On vérifiera, en effet (287), que les tangentes en B et C se coupent exactement sur l'ordonnée $M'_0M'_1$ lorsque le segment primitif $A_1A'_1$ est rectiligne, et cette condition est approximativement remplie lorsque $A_1A'_1$ est un arc de courbe assez petit pour qu'on puisse, sans erreur sensible, le confondre avec sa corde.

On peut donc obtenir, comme ligne intégrale approximative d'un diagramme donné, soit un polygone de cordes, soit un polygone de tangentes, et ces deux polygones ne diffèrent pas sensiblement de la courbe intégrale exacte quand on a soin de diviser le diagramme en trapèzes élémentaires assez petits.

VII. — Intégration des lignes droites et brisées.

286. *La ligne intégrale d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est une droite inclinée sur cet axe.*

En effet, la ligne primitive donne sur OY un seul point A de projection, auquel correspond un rayon unique PA du faisceau P, et, par suite, une direction unique, commune à toutes les cordes et à toutes les tangentes de la ligne intégrale. Cette ligne est donc une parallèle au rayon PA. Il suffira, pour la construire, de connaître un de ses points et ce point sera lui-même déterminé par la valeur de la constante arbitraire.

287. *La ligne intégrale d'une droite inclinée sur les axes est une parabole du second ordre.*

Soit ST (*fig.* 196) la droite donnée et soient OA_0, $A_0A'_0$, ... les hauteurs, supposées égales, des trapèzes élémentaires du diagramme OST. Les ordonnées moyennes de ces trapèzes, projetées sur OY, déterminent le faisceau P(MM'M''...) et la ligne polygonale OBCDE..., inscrite à la courbe intégrale. Les ordonnées extrêmes des trapèzes se projettent aux points A, A', A'', ..., qui divisent en deux parties égales les segments égaux de la ponctuelle y(MM'M'''...). Étendons successivement aux trapèzes qui ont pour hauteurs OA_0, OA'_0, OA''_0, OA'''_0, ... et pour ordonnées moyennes

correspondantes M_0M_1, A_0A_1, $M'_0M'_1$, $A'_0A'_1$, ..., la construction appliquée aux trapèzes élémentaires. Nous obtiendrons ainsi, comme éléments correspondants aux rayons PM, PA, PM', PA', ... du faisceau P, les cordes OB, OC, OD, OE, ... inscrites à la courbe intégrale (282). Les faisceaux O(BCDE ...) et P(MAM'A' ...), formés de rayons parallèles deux à deux, sont égaux; mais le faisceau P(MAM'A' ..) est perspectif au faisceau ∞(MAM'A'...), lequel est perspectif au faisceau ∞($M_0A_0M'_0A'_0$...) et, par conséquent, projectif au faisceau ∞($A_0A'_0A''_0$ ...). Donc ce dernier faisceau et le faisceau O(BCD ...) sont projectifs (G. 47) et engendrent une courbe du second ordre (G. 62). Ils n'ont d'ailleurs d'autre rayon uni que l'axe OY qui joint leurs centres. La courbe engendrée est donc une parabole (G. 97) dont les diamètres sont parallèles à OY (G. 125).

La tangente au sommet est perpendiculaire au même axe, c'est-à-dire parallèle au rayon PO correspondant à l'ordonnée du point d'intersection T de l'axe des x et de la droite donnée. Cette ordonnée est donc l'axe de la courbe.

Dans le cas qui nous occupe, les sommets F, G, ... de la ligne polygonale circonscrite se coupent exactement sur les ordonnées moyennes M_0, M'_0, ..., qui sont les diamètres de la parabole intégrale relatifs aux cordes OB, BC, ... (G. 121).

288. Une construction inverse (284) donne la droite ST, dérivée d'une parabole proposée, dont il suffit de connaître trois points quelconques B, C, D. Ces points déterminent, en effet, les cordes BC, CD, par suite les rayons PM', PM'', parallèles à ces cordes, et les ordonnées moyennes $M'_0M'_1$, $M''_0M''_1$ des segments $A_1A'_1$, $A'_1A''_1$ de la droite cherchée, dont on a ainsi deux points, M'_1, M''_1.

On obtient par cette construction autant de points qu'on veut d'un segment parabolique dont trois points sont donnés; car il suffit d'intégrer la droite dérivée déterminée par ces trois points pour construire tous les autres.

La droite dérivée permet de résoudre avec la même facilité les problèmes suivants [1] :

Construire la tangente en un point donné de la parabole.

Construire un point de la parabole, connaissant la direction de la tangente.

Construire une parabole du second ordre connaissant deux points et la tangente en un de ces points.

---

[1] MASSAU, *loc. cit.*, Livre II, nos 89-91.

289. Lorsque le diagramme à intégrer se compose d'une suite de rectangles juxtaposés, la ligne primitive est formée de segments rectilignes alternativement parallèles à l'axe des x et à l'axe des y. Les segments parallèles à OX ont pour intégrales des segments inclinés compris entre les mêmes ordonnées (286). Chacun de ces segments intégraux a d'ailleurs son origine à l'extrémité de celui qui précède, car chacun des segments primitifs parallèles à OY ayant tous ses points sur une même ordonnée, son intégrale se réduit à un point. La ligne intégrale est donc un polygone rectiligne dont les sommets sont sur les mêmes ordonnées que les segments primitifs parallèles à l'axe des y.

Dans ce cas particulier, les ordonnées extrêmes et moyennes des segments primitifs déterminent, par leur projection sur l'axe des y, une seule et même ponctuelle qui, projetée d'un même centre P, fournit, par la méthode des cordes (282) et par celle des tangentes (285), un seul et même polygone intégral.

290. Prenons comme ligne primitive le polygone rectiligne fourni par la précédente intégration. Chacun de ses côtés a pour intégrale un arc de parabole du second ordre, compris entre les mêmes ordonnées (287). La corde de cet arc est une parallèle au rayon du faisceau P déterminé par l'ordonnée moyenne du segment primitif correspondant. La division du diagramme partiel, limité à ce segment, en un certain nombre de trapèzes élémentaires, donnerait lieu à un nombre égal d'ordonnées moyennes et permettrait de substituer à la corde totale de l'arc parabolique intégral un polygone de cordes plus petites dont les sommets seraient autant de points de l'arc à déterminer.

Si l'on projetait sur OY, non plus les milieux des segments primitifs, mais leurs extrémités, on obtiendrait (285) les couples de tangentes aux extrémités des arcs intégraux. La projection du point commun à deux segments consécutifs de la ligne primitive ne déterminant qu'un seul rayon du faisceau projetant et, par suite, qu'une seule direction de tangente, on voit que deux arcs paraboliques consécutifs de la ligne intégrale ont, en leur point commun, une tangente commune. Ces arcs se trouvent donc raccordés suivant une courbe continue, comprise entre le polygone des cordes et le polygones des tangentes.

VIII. — Intégration exacte de courbes paraboliques. Ordonnée moyenne. Abscisse moyenne.

291. L'ordonnée du point milieu d'un segment de droite est exactement l'ordonnée moyenne de ce segment et, en même temps, l'ordonnée

sur laquelle se coupent les tangentes aux extrémités du segment correspondant de la ligne intégrale (287). C'est pourquoi les intégrations précédentes, portant sur des lignes primitives exclusivement composées d'éléments rectilignes, ont donné exactement les cordes et les tangentes constituant les lignes polygonales inscrites et circonscrites aux lignes intégrales. Il n'en est plus de même lorsque la ligne primitive est une courbe et, dans la méthode que nous avons d'abord exposée, la décomposition du diagramme primitif en trapèzes élémentaires, dont les hauteurs sont des quantités petites mais finies, ne permet de déterminer que par approximation les côtés du polygone de cordes et les sommets du polygone de tangentes. L'approximation est presque toujours suffisante dans la pratique, et d'ailleurs le caractère essentiel de la méthode graphique est de ne comporter que des résultats approchés. On peut cependant se proposer de substituer, dans certains cas, l'exactitude théorique à l'approximation. Il suffit pour cela de pouvoir déterminer exactement les ordonnées moyennes des arcs de la courbe primitive et les ordonnées qui correspondent aux abscisses moyennes des mêmes arcs. Les premières donnent, en effet, les coefficients angulaires des côtés du polygone inscrit, les secondes fixent les sommets du polygone circonscrit. Nous donnerons de cette double recherche des exemples appliqués aux courbes dont l'usage est le plus fréquent dans les opérations de quadrature, c'est-à-dire aux paraboles du second et du troisième ordre prises comme courbes primitives.

292. Considérons (*fig.* 196) un arc parabolique du second ordre déterminé par ses points extrêmes C, E, et par un point intermédiaire D dont l'ordonnée $A''_0 D = y_1$ est à égale distance h des ordonnées extrêmes $A'_0 C = y_0$ et $A'''_0 E = y_2$. L'ordonnée moyenne y_m doit satisfaire à la relation

$$(1) \qquad 2h\,y_m = \text{aire}\,A'_0 CDEA''_0 = h(y_0 + y_2) + \text{aire}\,CDE.$$

Mais les tangentes aux points C et E se coupent en un point L de l'ordonnée intermédiaire (G. 121) et l'on a, d'une part (G. 138), LD = DN, d'autre part (G. 255),

$$\text{aire}\,CDE = \tfrac{2}{3}\,\text{aire}\,CLE = \tfrac{4}{3}\,h.DN.$$

Substituant cette valeur dans (1) et réduisant, il vient

$$y_m = \frac{y_0 + y_2}{2} + \frac{2}{3}DN = y_1 - \frac{DN}{3}.$$

L'ordonnée moyenne de l'arc parabolique CDE est donc égale à l'or-

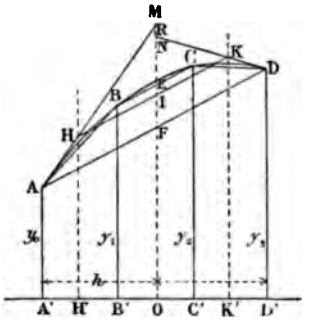
donnée intermédiaire diminuée du tiers du segment de cette ordonnée compris entre son extrémité et la corde de l'arc proposé.

293. Si l'arc parabolique est donné par ses points extrêmes C, E et par la tangente en un de ces points, cette tangente détermine, sur l'ordonnée intermédiaire, le point L, tel que LN = 2DN, et l'on obtient l'ordonnée moyenne en retranchant $\frac{2}{3}$ LN de A''_0L.

Ayant ainsi déterminé les ordonnées moyennes d'une suite d'arcs consécutifs de la parabole primitive du second ordre, on en déduit un polygone inscrit à la parabole du troisième ordre qui est la courbe intégrale de la proposée.

294. Un arc parabolique du troisième ordre étant donné par ses points extrêmes A, D (*fig.* 197) et par deux points intermédiaires B, C, tels que

Fig. 197.



les ordonnées y_0, y_1, y_2, y_3 soient équidistantes, on exprime que les coordonnées des quatre points satisfont à l'équation $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ de la courbe et que, d'autre part, l'ordonnée moyenne y_m satisfait à la relation $y_m = \int_{x_0}^{x_3} y\,dx$. On a ainsi cinq équations qui permettent d'éliminer les coefficients a, b, c, d et d'obtenir

$$y_m = \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8} = \frac{\mathrm{OF} + 3\mathrm{OE}}{4} = \mathrm{OF} + \frac{3}{4}\,\mathrm{FE}.$$

On a donc l'extrémité I de l'ordonnée moyenne en prenant le quart EI du segment EF de l'ordonnée intermédiaire compris entre les cordes AD, BC.

295. Lorsque l'arc parabolique du troisième ordre est donné par ses

deux points extrêmes A, D et par les tangentes AM, DN en ces points, deux des cinq équations précédentes, exprimant que les points B et C appartiennent à la courbe, sont remplacées par deux autres, exprimant que les dérivées de la courbe aux points A, D satisfont à la relation

$$y' = b + 2cx + 3dx^2.$$

On est alors conduit, par l'élimination des coefficients, à la relation

$$y_m = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{h}{3}y'_0 + y_3 - \frac{h}{3}y'_3\right),$$

dans laquelle y'_0, y'_3 sont respectivement des dérivées de y_0, y_3, h étant la moitié de la distance A'D' prise négativement de O en A' et positivement de O en D'.

L'ordonnée de la tangente AM, à la distance $A'H' = \frac{h}{3}$ de y_0, est

$$H'H = y_0 + \frac{h}{3}y'_0.$$

Pareillement, l'ordonnée de DN, à la distance $D'C' = \frac{h}{3}$ de y_3, est

$$K'K = y_3 + \frac{h}{3}y'_3.$$

Par suite,

$$y_m = \tfrac{1}{2}(H'H + K'K).$$

L'extrémité I de l'ordonnée moyenne est donc à l'intersection de HK et de l'ordonnée intermédiaire OM.

On peut encore remarquer que

$$y_m = \frac{1}{2}(H'H + K'K) = \frac{1}{2}\left(\frac{2y_0 + OM}{3} + \frac{2y_3 + ON}{3}\right)$$
$$= OF + \frac{1}{3}\,\frac{FM + FN}{2}.$$

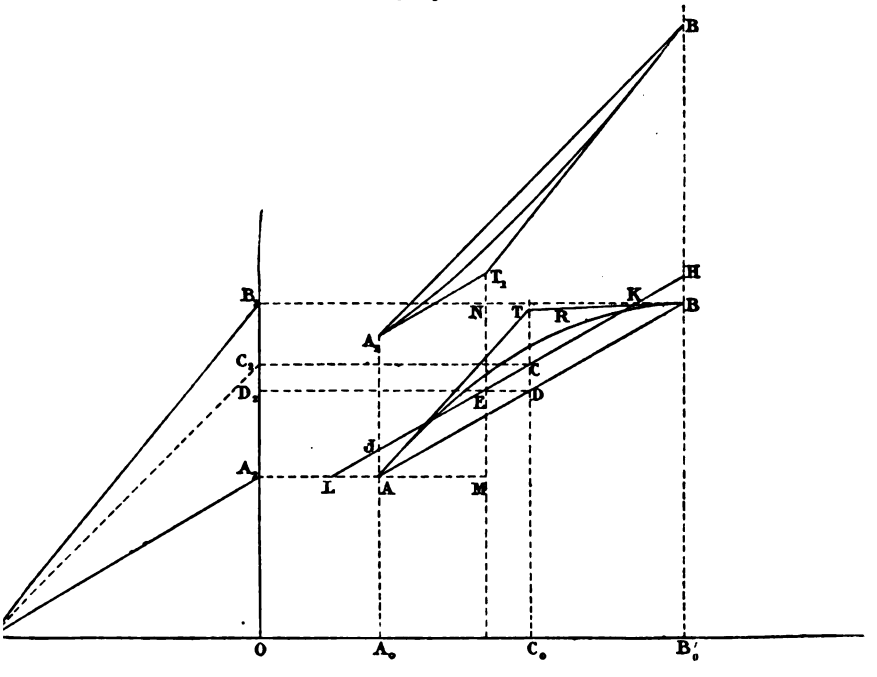
On obtiendra donc le point I en ajoutant à l'ordonnée moyenne O la corde AD un tiers de la distance comprise entre cette corde et le r R du segment intercepté sur OF par les tangentes à la courbe aux extrêmes A et D.

Lorsque l'arc AD appartient à une parabole du second ordre, le M, N coïncident et l'on est ramené au cas du n° 293.

296. Les constructions précédentes permettent de déterminer :

points qu'on veut d'un arc de parabole du troisième ordre dont on connaît deux points $A_1 B_1$ (*fig.* 198) et les tangentes en ces points. On trace, à cet effet, les rayons PA_2, PB_2, PC_2 du faisceau P, respectivement parallèles aux deux tangentes et à la corde $A_1 B_1$. Ces rayons déterminent les ordonnées extrêmes $A_0 A$, $B_0 B$, et l'ordonnée moyenne $C_0 C$, de l'arc AB, dérivée de $A_1 B_1$. On prolonge $C_0 C$ de la quantité $CT = 2DC$. On a ainsi (293) le point T d'intersection des tangentes en A et en B et, par suite, ces tangentes

Fig. 198.



elles-mêmes. L'arc parabolique du second ordre AB étant dès lors déterminé, on peut construire (288) autant de points qu'on voudra de cet arc et, par voie d'intégration, autant de points qu'on voudra de l'arc $A_1 B_1$.

297. On nomme *abscisse moyenne* d'un arc de courbe AB (*fig.* 198 ou du diagramme superficiel compris entre cet arc, les abscisses à ses extrémités et l'axe des y, la hauteur $D_2 E$ du rectangle équivalent de même base $A_2 B_2$.

Le point d'intersection des tangentes aux extrémités d'un arc de la courbe

intégrale a pour abscisse l'abscisse moyenne de l'arc correspondant de la courbe primitive.

Les tangentes T_1A_1, T_1B_1 aux extrémités de l'arc A_1B_1, intégrale de l'arc primitif AB, constituent elles-mêmes la ligne intégrale de la ligne brisée AMNB (289). La corde A_1B_1, commune aux deux intégrales, correspond à un seul et même rayon PC_2 du faisceau P, par suite à une seule et même ordonnée moyenne C_0C, commune aux deux diagrammes primitifs A_0ARBB_0, A_0AMNBB_0. Ces diagrammes étant dès lors équivalents, il en est de même des aires A_2ARBB_2, A_2MNB_2 qu'on obtient respectivement en retranchant les diagrammes primitifs de l'aire $A_0AA_2B_2BB_0$. Donc l'abscisse A_2M du point T_1 est l'abscisse moyenne de l'arc AB. Ainsi se trouve généralisée la proposition précédemment établie (G. 121) pour le cas où la courbe intégrale est un arc parabolique du second ordre.

298. La détermination exacte des abscisses moyennes relatives aux arcs consécutifs d'une courbe primitive donnée permet de construire exactement, par le procédé du n° 285, un polygone circonscrit à la courbe intégrale.

L'abscisse moyenne D_2E du diagramme limité par une courbe parabolique AB, du second ou du troisième ordre, rapportée à l'axe des y, s'obtient évidemment par les procédés déjà indiqués (291 à 295) pour la détermination de l'ordonnée moyenne C_0C du diagramme relatif à la même courbe, rapportée à l'axe des x.

Il existe d'ailleurs, entre l'ordonnée moyenne et l'abscisse moyenne d'un arc de courbe, une relation qui permet de construire l'une de ces deux valeurs quand on connaît l'autre.

Portons, en effet, l'ordonnée moyenne de l'arc AB en C_0C, sur l'ordonnée située à égale distance des extrémités de l'arc, et menons par le point C la parallèle JH à la corde AB. Les diagrammes A_0ARBB_0, A_0JHB_0, ayant même ordonnée moyenne, sont équivalents; par suite, le segment ARB est équivalent au parallélogramme AJHB et aussi au parallélogramme ALKB qui a même base et même hauteur que le précédent. On en déduit que les aires B_2BRAA_2, B_2KLA_2 sont équivalentes et que les lignes BRA, KL ont même abscisse moyenne D_2E. Donc l'ordonnée moyenne et l'abscisse moyenne de l'arc AB, portées respectivement sur l'ordonnée C_0C et sur l'abscisse D_2E situées à égale distance des extrémités de l'arc, ont leurs extrémités sur une parallèle EC à la corde AB. Cette propriété permet de construire, D_2E connaissant C_0C, et *vice versa*.

IX. — Méthodes approchées.

299. La détermination exacte des ordonnées moyennes et des abscisses

moyennes présente des difficultés croissantes pour les arcs paraboliques de degré supérieur au troisième. Cette détermination est d'ailleurs impossible dans un très grand nombre de cas, notamment quand on opère sur des courbes, non plus géométriques, mais graphiques (**97**). On doit alors recourir à des méthodes approchées. Ces méthodes consistent, en général, à diviser les courbes proposées en petits arcs qu'on assimile ensuite à des arcs de courbes dont on sait déterminer l'abscisse ou l'ordonnée moyenne.

Lorsqu'on substitue aux arcs primitifs les petites cordes rectilignes qui les sous-tendent, la méthode approchée est celle des trapèzes élémentaires, que nous avons exposée tout d'abord.

Lorsque les arcs substitués sont des arcs paraboliques du second ordre, la méthode approchée est la traduction graphique de celle de Simpson (**233**) et l'on applique à la détermination des ordonnées moyennes les procédés des n^{os} **292** et **293**.

On substitue quelquefois des arcs paraboliques d'ordre supérieur au second, lorsque la courbe primitive présente des points d'inflexion. Si ces arcs sont du troisième ordre ([1]), on détermine leurs ordonnées moyennes par les procédés des n^{os} **294** et **295**.

300. On peut déterminer la limite de l'erreur commise dans une intégration graphique approchée par une méthode imitée de celle que Poncelet a proposée pour les quadratures approximatives (**234**). A cet effet, on considère successivement deux lignes exactement intégrables, et telles que leurs intégrales soient, l'une plus grande, l'autre plus petite que l'intégrale de la courbe proposée. L'erreur, en plus ou en moins, que l'on commet en adoptant l'une ou l'autre des deux intégrales exactes est plus petite que leur différence; elle est encore réduite quand on prend la demi-somme des deux intégrales. Les lignes substituées sont, le plus souvent, des polygones rectilignes, l'un circonscrit, l'autre inscrit à la courbe proposée.

Soit (*fig.* 199) AG la courbe primitive. Divisons sa projection, A_0G_0, sur l'axe des x, en un nombre pair de petits segments égaux, et menons les ordonnées des points de division. Les points B, D, F sont les extrémités des ordonnées moyennes des tangentes à la courbe en ces mêmes points. On obtiendra donc, par les parallèles aux rayons du faisceau $P(B'D'F')$, la ligne polygonale $A_1C_1E_1G_1$, intégrale du polygone circonscrit à AG.

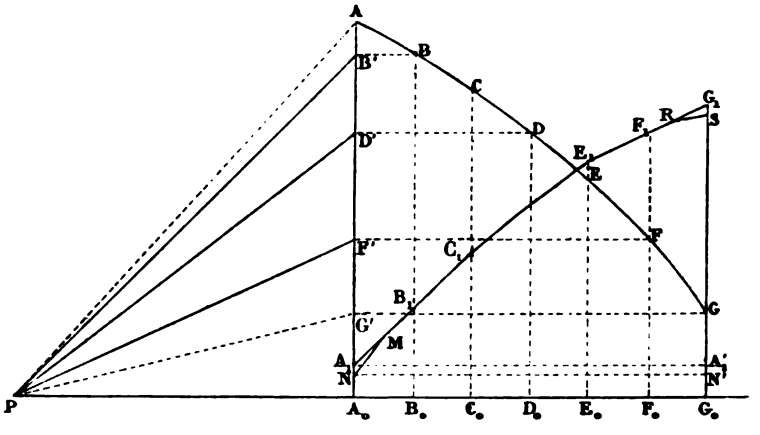
Le premier côté A_1C_1 de cette ligne coupe l'ordonnée B_0B au point B_1,

---

([1]) Voir, *Sur la quadrature des paraboles du troisième degré*, une Communication de M. le général PARMENTIER à l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Montpellier; 1879.

que nous prenons comme origine d'intégration de la ligne polygonale inscrite BDF. L'intégrale de cette ligne, construite par la méthode de l'abscisse moyenne, se confondra avec la partie $B_1 C_1 E_1 F_1$ de l'intégrale précédemment obtenue. Restent les côtés extrêmes AB, FG du polygone inscrit ABDFG. L'intégrale de AB a pour tangentes à ses extrémités, d'une part $B_1 A_1$, d'autre part, la droite MN, parallèle au rayon PA, qui passe par le point d'intersection de $B_1 A_1$ et de l'abscisse moyenne de AB, c'est-à-dire par le point milieu M de $B_1 A_1$. Pareillement, les tangentes aux extrémités de l'intégrale de FG sont, d'une part $F_1 G_1$, et d'autre part la droite RS, menée par le milieu R de $F_1 G_1$ parallèlement au rayon PG'. Les polygones inscrit et circonscrit à AG donnent donc respectivement les intégrales N'S et $A'_1 G_1$, entre lesquelles se trouve comprise l'intégrale exacte de AG. Si l'on adopte l'une ou l'autre des intégrales limites, on commet une

Fig. 199.



erreur moindre que leur différence $A'_1 G_1 - N'S = SG_1 - N'A'_1$, et cette erreur est encore réduite quand on prend la moyenne entre les deux intégrales limites.

301. Dans le calcul graphique des mouvements de terres, exposé au Chapitre XI, les constructions qui conduisent des aires aux volumes (252) et des volumes aux moments de transports (257) consistent en deux intégrations graphiques successives grossièrement approchées. C'est ainsi que, par la projection des ordonnées moyennes (282), on a obtenu (252) le profil de distribution, qui est une ligne polygonale inscrite à la courbe intégrale du profil transformé, courbe composée (287) d'une suite d'arcs rac-

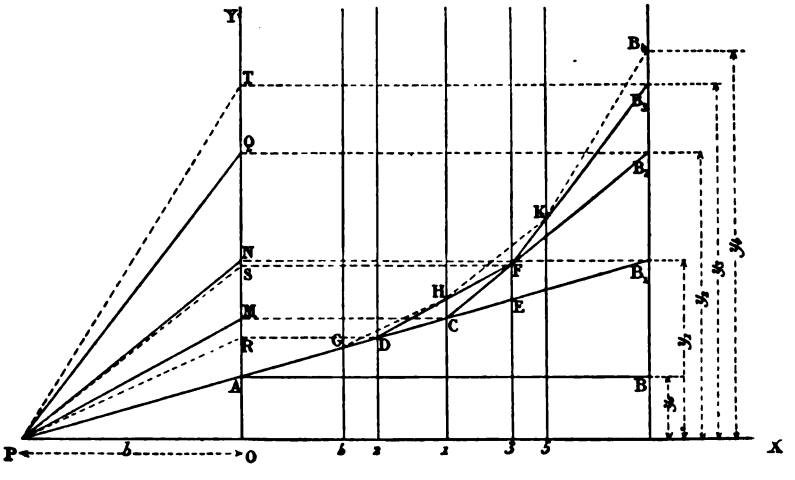
cordés de paraboles à axe vertical. Mais l'erreur est ici sensible, parce que les trapèzes du profil transformé, compris entre des ordonnées dont l'écartement est celui des profils en travers, ne présentent plus les bases très petites des trapèzes élémentaires que nous avons précédemment considérés.

On évite cette erreur en projetant (283) les sommets du profil transformé. On obtient ainsi un nouveau polygone, circonscrit à la courbe intégrale en même temps qu'au polygone inscrit. En ajoutant à l'aire de ce dernier polygone les deux tiers (G. 255) de la somme algébrique des aires des triangles compris entre la ligne circonscrite et la ligne inscrite, on détermine exactement l'aire du profil de distribution.

X. — Construction des courbes paraboliques.

302. Soit AB $= x$ (*fig.* 200) un segment de droite parallèle à l'axe des

Fig. 200.



x et situé à la distance a de cet axe. On a

(1) $$y_0 = a.$$

Prenons une base de réduction PO égale à l'unité et menons PA, dont le prolongement AB_1 est la ligne intégrale de AB. On a

$$y_1 = BB_1 + y_0,$$

soit, par les triangles semblables BAB_1, OPA,

(2) $$y_1 = ax + a.$$

Projetons B_1 en N et menons, par le milieu C de AB_1, CB_2 parallèle à PN. On a

$$y_2 = B_1B_2 + y_1.$$

Mais les triangles semblables B_1CB_2, APN donnent

$$\frac{B_1B_2}{y_1 - y_0} = \frac{x}{2}.$$

Substituant les valeurs de B_1B_2, y_0 et y_1, il vient

$$(3) \qquad y_2 = \frac{ax^2}{2} + ax + a.$$

Menons les ordonnées 2 et 3 qui divisent AB en trois segments égaux. Projetons C, milieu de AB_1, en M, B_2 en Q. Par le point de rencontre D de l'ordonnée 2 et de AB_1, menons DF parallèle à PM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée 3 en F et, par le point F, menons FB_3 parallèle à PQ. Remarquons d'abord que le point F se confond avec le point de rencontre F_1 de l'ordonnée 3 et de CB_2. On a, en effet, par les couples de triangles semblables EDF et APM, ECF_1 et APN,

$$\frac{EF}{AM} = \frac{x}{3}, \quad \frac{EF_1}{2AM} = \frac{x}{6}, \quad \text{d'où} \quad EF = EF_1.$$

Cela posé, les triangles semblables B_2FB_3, NPQ donnent

$$\frac{B_2B_3}{NQ} \quad \text{ou} \quad \frac{B_2B_3}{y_2 - y_1} = \frac{x}{3}$$

et, comme

$$y_3 = B_2B_3 + y_2,$$

on a, en substituant,

$$(4) \qquad y_3 = \frac{ax^3}{6} + \frac{ax^2}{2} + ax + a.$$

Menons encore les ordonnées 4, 1, 5, qui partagent AB en quatre segments égaux. Projetons en R le point de rencontre D de AB_1 et de l'ordonnée 2; en S le point F, en T le point B_3. Par le point G d'intersection de AB_1 et de l'ordonnée 4, menons GH, parallèle à PR, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée 1 en H; par le point H, menons HK, parallèle à PS, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée 5 en K; enfin menons, par le point K, KB_4 parallèle à PT. Nous démontrerions, comme précédemment, que H est sur DF, que K est sur FB_3, que

$$\frac{B_3B_4}{QT} \quad \text{ou} \quad \frac{B_3B_4}{y_3 - y_2} = \frac{x}{4}$$

et, finalement, que

$$(5) \qquad y_4 = \frac{ax^4}{24} + \frac{ax^3}{6} + \frac{ax^2}{2} + ax + a.$$

On peut répéter indéfiniment cette construction, qui fournit, à chaque opération nouvelle, une relation dont l'opération précédente avait fourni la dérivée. On a, en général,

$$m+1) \quad \begin{cases} y_m = \dfrac{ax^m}{m(m-1)(m-2)\ldots 1} \\ \qquad + \dfrac{ax^{m-1}}{(m-1)(m-2)\ldots 1} + \ldots + \dfrac{ax}{1} + a. \end{cases}$$

On obtient ainsi la parabole d'ordre m, qui est la $m^{\text{ième}}$ intégration d'une droite parallèle à l'axe des x.

L'une quelconque des constructions partielles, celle, par exemple, qui conduit de la parabole d'ordre $k-1$ à la parabole d'ordre k, donne une ligne polygonale dont les côtés extrêmes, aboutissant aux points A et B_k, ont leurs directions respectivement parallèles aux rayons du faisceau P qui projettent les extrémités A, B_{k-1} de l'arc de parabole précédent. Or on sait que ces directions sont précisément celles des tangentes aux extrémités de l'arc d'ordre k. Conséquemment, toutes les paraboles sont tangentes à la droite AB_1 au point A et chacune d'elles est tangente à l'extrémité du dernier côté de la ligne polygonale correspondante.

303. En général, étant donnée l'équation

$$y_m = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + hx^2 + kx + l$$

d'une parabole d'ordre m, on prendra ses dérivées successives

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + \ldots + k, \\ y_{m-2} &= m(m-1)ax^{m-2} + (m-1)(m-2)bx^{m-3} + \ldots + h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 &= m(m-1)(m-2)\ldots 2ax + (m-1)(m-2)\ldots 1b, \\ y_0 &= m(m-1)(m-2)\ldots 2.1a, \end{aligned}$$

dont la dernière est une parallèle à l'axe des x; on tracera cette droite; on construira son intégrale en prenant comme origine le point

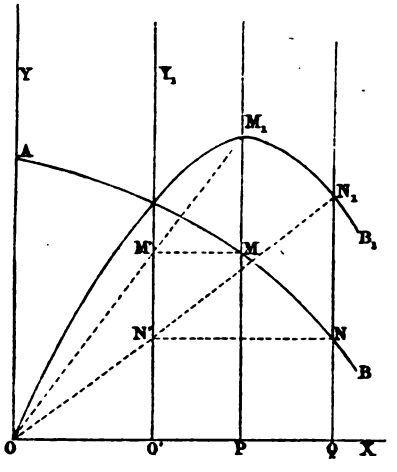
$$[x = 0, y = (m-1)(m-2)\ldots 2.1b];$$

on obtiendra ainsi la ligne qui représente y_1. On procédera de même aux intégrations successives et l'on aboutira finalement à la parabole de l'équation proposée.

XI. — Construction des courbes $y = xf(x)$ et $y = \frac{f(x)}{x}$, étant donnée l courbe $y = f(x)$.

304. Soient (*fig.* 201) $OP = x$, $PM = y$ les coordonnées d'un point l de la courbe donnée AB. On doit avoir, comme ordonnée de la nouvell courbe correspondant à l'abscisse OP, $PM_1 = xf(x) = OP.PM$. Soit don $O'Y_1$ l'ordonnée à la distance $OO' = b$, b étant la base de réduction, qu nous supposerons égale à l'unité. On projette M en M', parallèlement l'axe des x; on projette ensuite, du centre O, M' en M_1 sur l'ordonnée PM On voit immédiatement que M_1 est le point de la nouvelle courbe situé su

Fig. 201.



la même ordonnée que M. On détermine ainsi autant de points qu'on de $y = xf(x)$.

La même méthode s'applique à la construction de la courbe

$$y = (x - a)f(x),$$

pourvu qu'on transporte le centre du faisceau projetant au point d des x qui a pour abscisse a.

305. Soit $y_0 = a$ une parallèle à l'axe des x. La construction pr donne la droite $y_1 = ax$, dont l'équation devient $y_1 = ax + b$, o déplace l'axe des x parallèlement à lui-même d'une quantité b dar des y négatifs. La même construction, appliquée à cette droite et par le déplacement de l'axe des x de la quantité c dans le sens de

tifs, donne la courbe

$$y_2 = (ax + b)x + c = ax^2 + bx + c.$$

En répétant l'opération m fois, on arrive à déterminer l'ordonnée y_m de la courbe

$$y_m = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + kx + l,$$

que nous avons précédemment considérée (**303**).

306. Soit maintenant OB_1 (*fig.* 201) la courbe donnée $y = f(x)$, et soient $OP = x$, $PM_1 = f(x)$ les coordonnées d'un de ses points M_1. La courbe AB représente l'équation $y = \frac{f(x)}{x}$ et le point M de cette courbe, correspondant au point M_1 de OB_1, sera donné par la construction du n° **304** renversée. On joindra donc OM_1, qui coupera en M′ l'ordonnée menée à l'unité de distance de l'origine, et l'on projettera, parallèlement à l'axe des x, M′ en M sur PM_1. Même construction pour $y = \frac{f(x)}{x - a}$.

XII. — Construction des courbes hyperboliques.

307. On entend par hyperboles de l'ordre m les courbes dont l'équation est de la forme

$$(1) \qquad y_m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{k}{x} + l.$$

Soit à construire une de ces courbes. En appliquant d'abord la construction du numéro précédent à la droite $y_0 = a$, on obtient la droite $y_1 = \frac{a}{x}$, soit $y_1 = \frac{a}{x} + b$, si l'on fait subir à l'axe des x le déplacement déjà indiqué (**305**). La même construction, appliquée à la nouvelle droite et complétée par le déplacement de l'axe des x de la quantité c, donne

$$y_2 = \left(\frac{a}{x} + b\right)\frac{1}{x} + c = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c.$$

La construction, répétée m fois, conduit à l'ordonnée y_m de l'équation proposée [1].

---

[1] Le Mémoire déjà cité de M. J. Massau, que nous avons mis si souvent à contribution pour le fond des matières traitées dans cet Appendice, contient, en dehors des applications à la Statique, d'importants développements sur la transformation des

XIII. — Intégration graphique par anamorphose (1).

308. Soit

$$\int\int x^m y^n \, dx \, dy$$

une intégrale double prise à l'intérieur d'un contour fermé quelconque, les exposants m, n étant supposés entiers et positifs. Si l'on fait porter la première intégration sur $y^n \, dy$, entre les valeurs limites y_0 et y_1 que prend, sur le contour considéré, l'ordonnée y pour la valeur x de l'abscisse, on a

$$\int x^m \, dx \int_{y_0}^{y_1} y^n \, dx = \int x^m \, dx \left(\frac{y_1^{n+1}}{n+1} - \frac{y_0^{n+1}}{n+1} \right).$$

Quel que soit le nombre des intersections du contour avec la parallèle à l'axe des y menée à la distance x de l'origine, l'intégrale est égale à

$$\frac{1}{n+1} \int y^{n+1} x^m \, dx,$$

la somme étant prise le long du contour fermé, à partir de l'un quelconque

---

axes; — sur les modifications de la base d'intégration; — sur le déplacement du centre de projection; — sur la détermination des constantes d'intégration; — sur la construction des paraboles et des hyperboles de divers ordres, données, non plus par leurs équations, mais par un nombre suffisant de points et de tangentes; — sur la construction des courbes unicursales; — sur la détermination des racines des équations; — sur la représentation graphique des cubes de terrassements; — sur un nouveau principe de représentation des fonctions par l'emploi d'un système général de coordonnées; — sur l'application de ce principe à la construction d'un grand nombre de systèmes de Tableaux graphiques qui comprennent, en particulier, l'élégante et ingénieuse solution de M. Lalanne (191-194); — sur l'élimination graphique; — sur la représentation des fonctions à trois variables $w = f(t, u, v)$ aboutissant à l'abaque de M. Lalanne (*fig.* 115), dans lequel les droites enveloppées doivent, en ce cas, être considérées comme les traces des plans d'égale cote; — sur la construction et l'adaptation de quatre Tableaux représentant respectivement les fonctions $f_1(x, y, t) = 0$, $f_2(t, z, t') = 0$, $f_3(t', u, t'') = 0$, $f_4(t'', v, w) = 0$, et permettant de déterminer successivement les variables t, t', t'', w quand on donne x, y, z, u, v, c'est-à-dire de calculer w en fonction de cinq variables indépendantes; — sur la construction des systèmes de droites; — enfin, sur le problème du mouvement des terres considéré à un point de vue très général.

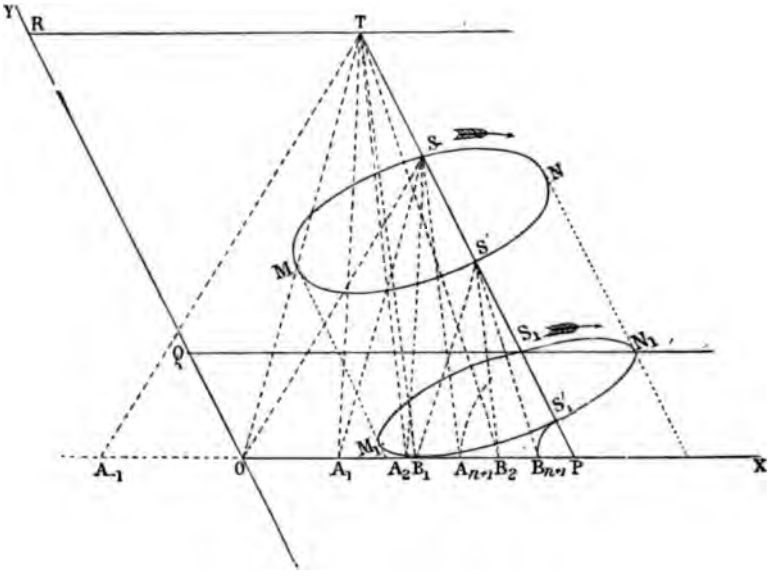
(1) Voir Ed. Collignon, *Complément du Cours d'Analyse*, etc. (Paris, 1879, p. 17 et suiv.), et *Traité de Mécanique*, 2e Partie, *Statique* (2e édit., Paris, 1881, p. 315). Voir plus spécialement, du même auteur, *Méthode géométrique d'évaluation de certaines intégrales doubles*, dans le *Compte rendu de la troisième session de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Lille, 1874; et *Note sur la cubature des solides de révolution*, dans le même Recueil, Congrès d'Alger, 1881.

de ses points, auquel on doit revenir après avoir décrit, dans l'un ou dans l'autre sens, tout le périmètre de la figure.

Une double série d'opérations graphiques permet de ramener la formation de l'intégrale $\int y^{n+1} x^m \, dx$ à l'évaluation d'une aire plane.

309. Soit MSNS′ (*fig.* 202) le contour directeur fermé qui définit les valeurs correspondantes de x et de y. Prenons sur l'axe des y une longueur arbitraire OR $= a$ et menons à l'axe des x la parallèle RT qui ren-

Fig. 202.



contre au point T l'ordonnée d'un point quelconque S du contour. Joignons TO et menons par le point S, parallèlement à cette droite, le rayon SA_1 qui rencontre l'axe OX en A_1. Joignons TA_1 et menons le rayon SA_2, parallèle à TA_1, qui rencontre OX en A_2. Supposons que la même construction, répétée $n+1$ fois, conduise à déterminer finalement le point A_{n+1} sur OX et prenons, sur l'ordonnée du point S, $PS_1 = PA_{n+1} = y_1$. Le point S_1 est le point transformé de S et, en répétant un nombre convenable de fois la même série d'opérations, nous obtenons la courbe $M_1S_1N_1S'_1$, transformée de MSNS′.

Les faisceaux directement égaux $T(OA_1A_2 \ldots A_n)$ et $S(A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1})$, dont les rayons correspondants se coupent sur la droite à l'infini du plan,

sont perspectifs, et les ponctuelles projectives (G. 42) qu'ils déterminent sur OX sont semblables, car elles ont comme éléments unis leur point P d'intersection avec TS et leur point à l'infini (G. 57). On a dès lors, par l'égalité entre les rapports anharmoniques (G. 50) des segments limités aux points unis et à deux autres autres couples quelconques de points correspondants :

$$\frac{PA_1}{PO} = \frac{PA_2}{PA_1} = \ldots = \frac{PA_{n+1}}{PA_n} = \frac{SP}{TP} = \frac{y}{a},$$

d'où

$$\frac{PA_{n+1}}{PO} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{x} = \frac{y^{n+1}}{a^{n+1}}$$

ou

$$xy^{n+1} = y_1 a^{n+1}$$

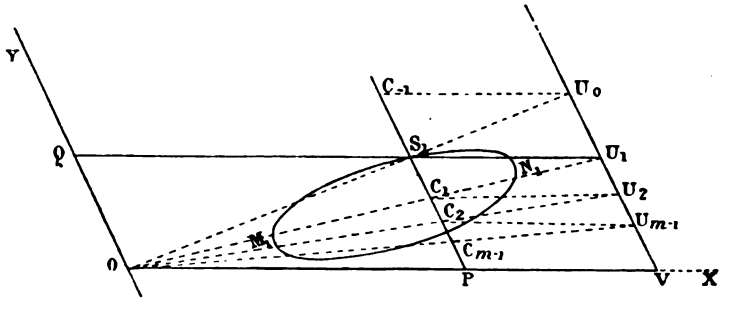
et, par suite, en prenant $M_1 S_1 N_1 S'_1$ pour nouveau contour directeur,

$$\frac{1}{n+1}\int y^{n+1} x^m \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}\int y_1 x^{m-1} \, dx.$$

On est ainsi conduit à remplacer l'expression proposée par une autre plus simple, puisque l'exposant de l'ordonnée s'y trouve réduit à l'unité.

310. Une réduction analogue doit être opérée sur l'exposant $m - 1$ de x. On prolonge à cet effet (*fig.* 203) l'abscisse QS_1 du point S_1 de la pre-

Fig. 203.



mière transformée jusqu'à sa rencontre en U_1 avec une parallèle VU_1 à O menée à la distance arbitraire $OV = b$. On mène OU_1 qui coupe S_1P en On mène C_1U_2 parallèle à OX et l'on joint OU_2. On répète la construc $m - 1$ fois et l'on détermine ainsi le point C_{m-1}.

Les faisceaux $\infty(S_1C_1C_2 \ldots C_{m-2})$ et $O(C_1C_2C_3 \ldots C_{m-1})$ qui se pent sur U_1V_1 sont perspectifs, et les ponctuelles projectives qu'ils d

minent sur S_1P sont semblables, car elles ont comme éléments unis leur point P d'intersection avec ∞ O et leur point à l'infini, déterminé par l'intersection de l'axe OY, rayon du faisceau O parallèle à S_1P, et de la droite à l'infini du plan, rayon correspondant du faisceau ∞. On a donc

$$\frac{PC_1}{PS_1} = \frac{PC_2}{PC_1} = \cdots = \frac{PC_{m-1}}{PC_{m-2}} = \frac{x}{b},$$

d'où

$$\frac{PC_{m-1}}{PS_1} = \frac{x^{m-1}}{b^{m-1}},$$

et, en désignant par y' l'ordonnée PC_{m-1} du point C_{m-1}, transformé du point S_1,

$$b^{m-1}y' = y_1 x^{m-1}.$$

En opérant la transformation pour tous les points du contour M_1N_1 et en prenant l'intégrale le long du troisième contour ainsi obtenu, on a

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}\int y_1 x^{m-1}\,dx = \frac{a^{n+1}b^{m-1}}{n+1}\int y'\,dx.$$

Une double transformation anamorphique, effectuée au moyen du compas et de la règle, a donc fourni un contour fermé dont l'aire, multipliée par un facteur constant, donne l'intégrale cherchée.

311. La méthode s'étend au cas où les exposants m, n, sans cesser d'être entiers, ne sont pas tous deux positifs. Il suffit, en effet, pour augmenter d'une ou plusieurs unités l'exposant d'une des deux variables, d'effectuer un nombre convenable de fois la construction inverse de celle qui a permis de réduire le même exposant.

C'est ainsi que, pour élever d'une unité l'exposant de y, on mènera (*fig.* 202) TA_{-1} parallèle à SO; et, pour élever d'une unité l'exposant de x, on mènera (*fig.* 203) par le point U_0 d'intersection de OS_1 et de VU_1 la parallèle U_0C_{-1} à OX. La méthode serait seulement en défaut pour $m = n = -1$.

312. Dans le cas des exposants négatifs, on trouve quelque avantage à modifier la construction de la manière qui va être indiquée.

Considérons l'intégrale double

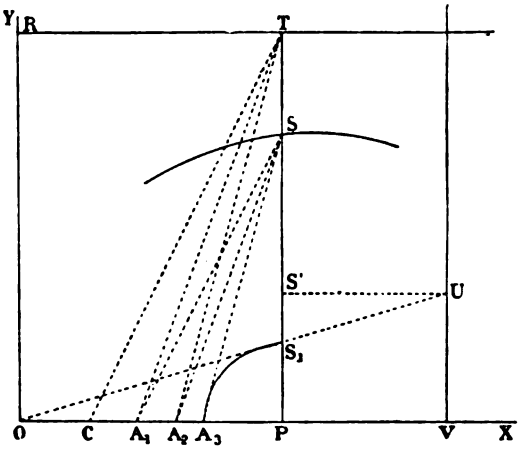
$$\int\int \frac{y^2}{x}\,dx\,dy,$$

qui devient

$$\frac{1}{3}\int\int \frac{y^3}{x}\,dx$$

quand on fait porter la première intégration sur y. Le procédé du n° 309 permettrait de réduire le coefficient de y à l'unité, mais l'exposant négatif de x serait en même temps diminué d'une unité et l'on aurait à considérer l'intégrale $\int \frac{y' dx}{x^2}$. Pour éviter cet inconvénient, on commence la construction relative à chaque point S du contour primitif à transformer (*fig.* 204) en joignant le point T, non plus à l'origine, qui est à la distance

Fig. 204.



variable $PO = x$ du pied P de l'ordonnée, mais à un point C, pris à la distance constante $PC = c$ de P. On mène alors SA_1 parallèle à TC, SA_2 parallèle à TA_1, SA_3 parallèle à TA_2, et le point S_1, tel que $PS_1 = PA_3$, est le transformé du point S. On a alors (309)

$$\frac{PA_3}{PC} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{c} = \frac{y^3}{a^3}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{3}\int \frac{y^3}{x} dx = \frac{a^3}{3c}\int \frac{y_1}{x} dx.$$

On prolonge ensuite OS_1 jusqu'en U; on mène US' parallèle à l'axe des x et le point S' est le transformé définitif du point S; car on a

$$\frac{PS'}{OV} = \frac{PS_1}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{b} = \frac{y_1}{a},$$

d'où

$$\frac{a^3}{3c}\int \frac{y_1}{x} dx = \frac{a^3}{3bc}\int y' dx.$$

313. On a vu que la méthode est en défaut lorsque x et y ont simultanément pour exposant l'unité négative. Si l'on avait à évaluer l'intégrale double

$$(1) \qquad \int\int \frac{dx\,dy}{xy},$$

prise à l'intérieur d'un contour donné, on transformerait ce contour en faisant correspondre à tout point (x, y), pris sur son périmètre, un point (x', y') déterminé par les relations

$$x' = \log x, \quad y' = \log y.$$

L'aire du contour transformé

$$\int\int dx'\,dy$$

serait alors égale à l'intégrale (1) prise à l'intérieur du contour primitif.

Ce procédé d'anamorphose analytique est applicable à toutes les intégrales doubles de la forme

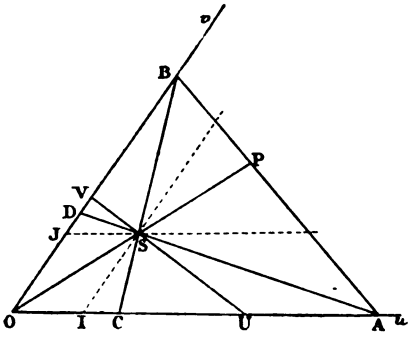
$$\int\int \varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy.$$

NOTES ADDITIONNELLES DU TRADUCTEUR.

Note I. — Coordonnées tangentielles [1].

314. Dans le système cartésien, la position d'un point S du plan (*fig.* 205)

Fig. 205.



est définie par son abscisse SI $= x$ et par son ordonnée SJ $= y$. Une courbe est déterminée, dans le même système, par une relation, $f(x, y) = 0$, entre les coordonnées de ses points. Lorsque la relation est du premier degré, la courbe est une ligne droite.

On peut considérer une courbe, non plus comme le lieu d'un point mobile, mais comme l'enveloppe d'une droite mobile. Dans ce cas, l'échange des éléments *point* et *droite*, effectué conformément à la loi de dualité (G. 20), conduit à définir une droite quelconque du plan par une abscisse u et par une ordonnée v, et à déterminer une courbe par la relation $f(u, v) = 0$, entre les coordonnées des droites qui lui sont tangentes. La courbe se réduit à un point lorsque les droites sont concourantes. On donne aux coordonnées de ce nouveau système le nom de *coordonnées tangentielles*.

[1] Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, p. 301, 327, 2e édit. Paris, 1880. — Felix Lucas, *Etudes analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, p. 63, 69, 235, Paris, 1864.

Si A, B sont deux points fixes, respectivement situés sur les axes OA, OB, une droite quelconque UV, qui rencontre les mêmes axes aux points U, V, aura, en coordonnées tangentielles, $\frac{AU}{UO} = u$ pour abscisse, $\frac{BV}{VO} = v$ pour ordonnée.

315. *Si les coordonnées d'une droite mobile ont entre elles la relation linéaire*

$$\lambda u + \mu v = \nu, \tag{1}$$

dans laquelle λ, μ, ν *sont des coefficients constants, cette droite pivote sur un point fixe.*

AD étant la position de la droite mobile quand elle passe par le point A, on a

$$u = 0, \quad v = \frac{BD}{DO}$$

et, par suite,

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{DO}{BD}.$$

BC étant la position de la droite quand elle passe par le point B, on a

$$v = 0, \quad u = \frac{AC}{CO}$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{CO}{AC}.$$

Substituant, dans (1), les valeurs de $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, et remplaçant les coordonnées courantes u, v par les rapports de segments qui les déterminent (314), il vient

$$\frac{CO}{AC}\frac{AU}{UO} + \frac{DO}{BD}\frac{BV}{VO} = 1;$$

d'où (G. 50)

$$\frac{AU}{AC} : \frac{OU}{OC} = 1 - \frac{BV}{BD} : \frac{OV}{OD} = \frac{DV}{DB} : \frac{OV}{OB}. \tag{2}$$

Les rapports anharmoniques (AUOC), (DVOB) étant égaux, les ponctuelles décrites sur OA et sur OB par la droite mobile sont projectives (G. 52). Ces ponctuelles ont d'ailleurs comme point uni leur intersection O; donc elles sont des sections d'un faisceau de rayons du premier ordre S (G. 45).

La relation (1), à laquelle satisfont tous les rayons du faisceau S, peut être considérée comme l'équation du point S, et, en général, toute relation de la même forme est l'équation d'un point.

Réciproquement, si une droite pivote sur un point S, ses coordonnées tangentielles satisfont à la relation (1) et l'on peut, en attribuant à l'un des trois coefficients λ, μ, ν une valeur arbitraire, déterminer les deux autres de manière que cette équation représente le point considéré.

316. Lorsque la base AB est la droite à l'infini du plan, les rapports entre segments infinis $\frac{AU}{OU}$, $\frac{DB}{OB}$ sont tous deux égaux à l'unité (G 197); le point C est en I sur la parallèle à OB, le point D en J sur la parallèle à OA et la relation (2) donne

$$(3) \qquad OI\frac{1}{OU} + OJ\frac{1}{OV} = 1.$$

La droite UV a, dans ce cas, pour coordonnées, les valeurs inverses des segments OU, OV compris entre l'origine et les points où les axes sont respectivement rencontrés par cette droite [1]. Les rapports de coefficients

$$\frac{\lambda}{\nu} = OI, \quad \frac{\mu}{\nu} = OJ$$

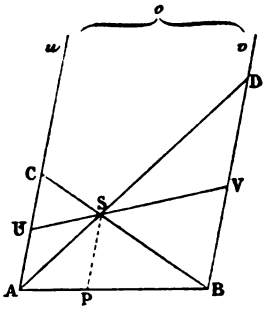
sont les coordonnées cartésiennes du point S.

---

[1] C'est le système de coordonnées tangentielles plus spécialement dénommé système *plückerien*. Il correspond directement, suivant la loi de dualité, au système de coordonnées de Descartes. Le système tangentiel plus général, considéré au n° 315, correspond, en effet, à un système ponctuel dans lequel l'équation d'une droite est la relation linéaire entre les segments respectivement interceptés sur les axes OB, OA par les faisceaux A, B, dont les rayons correspondants se coupent deux à deux sur la droite considérée. Un point S de cette droite, situé à l'intersection des rayons correspondants AD, BC, a, dans ce cas, pour coordonnées les rapports $\frac{CO}{CA}$, $\frac{DO}{DB}$. Si la base AB passe à l'infini, l'équation ponctuelle de la droite subit une transformation analogue à celle que nous venons d'établir (316) pour l'équation tangentielle du point, et le système de coordonnées considéré devient précisément celui de Descartes. (Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, p. 315 et suiv. Paris, 1880.) Sur les coordonnées *suffisantes* de Descartes et les coordonnées *surabondantes* (triangulaires et polygonales) de Bobillier, voir *Annales de Gergonne*, t. XVIII, p. 324, 1827, et Paul Serret, *Géométrie de direction*, p. 1 et suiv. Paris, 1869). Sur les coordonnées cartésiennes comme cas particulier des coordonnées *trilinéaires*, voir Salmon, *Traité de Géométrie analytique*, traduction française, p. 96. Paris, 1880. Sur la corrélation entre le système trilinéaire, qui définit la position d'un point par les rapports mutuels de ses distances à trois droites fixes, et le système tangentiel, qui définit une

317. Supposons les points A et B à distance finie et le point O à l'infini. Les axes sont alors parallèles (*fig.* 206), les rapports $\frac{OU}{OC}$, $\frac{OV}{OD}$ sont égaux à l'unité et la relation (2) devient

Fig. 206.



$$(4) \qquad \frac{1}{AC}\cdot AU + \frac{1}{BD}\cdot BV = 1.$$

La droite UV a donc pour coordonnées les segments AU, BV, pris avec leurs signes et les rapports de coefficients $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ sont les inverses $\frac{1}{AC}$, $\frac{1}{BD}$ des segments interceptés sur les axes parallèles par les rayons du faisceau S qui contiennent les points A, B. Les ponctuelles décrites sur les axes par la droite mobile sont d'ailleurs semblables, car leurs points à l'infini se correspondent (G. 57). Nous avons déjà employé le système des coordonnées parallèles (155).

318. Dans le cas général de la *fig.* 205, le rapport des segments interceptés sur la base AB par la transversale OS est donné par la relation connue

$$PB.DO.CA = -PA.CO.DB,$$

d'où (315)

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{CA}{CO}\cdot\frac{DO}{DB} = -\frac{\nu}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Dans le cas des axes parallèles (*fig.* 206), le rapport $\frac{DO}{CO}$ devient égal à l'unité et l'on a encore (317)

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{CA}{DB} = -\frac{\mu}{\lambda};$$

par où l'on voit, en tenant compte des signes des segments, que la droite

---

droite par les rapports mutuels de ses distances à trois points fixes, voir SALMON, *loc. cit.*, p. 537. Sur les origines de la loi de dualité, voir tome I, *Géométrie de position*, note de la page 14. PLÜCKER (*System der analytischen Geometrie*, 1835) a présenté, au point de vue purement analytique, le principe de la dualité, déjà reconnu par la méthode des polaires réciproques, mais MÖBIUS avait précédemment introduit l'usage des coordonnées tangentielles (*Der barycentrische Calcul*, etc. Leipzig, 1827).

SP, parallèle aux axes, est située entre ces axes ou en dehors, selon que $\frac{\mu}{\lambda}$ est positif ou négatif.

319. Si le point S est situé sur AB (*fig.* 205) les points C, A se confondent et l'on a (315)

$$\frac{AC}{CO} = \frac{\nu}{\lambda} = 0.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{u}{v} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Mais les côtés du triangle OAB étant rencontrés aux points U, S, V, par la transversale mobile, on a

$$SB.OV.AU = SA.OU.BV,$$

d'où

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AU}{OU} : \frac{BV}{OV} = \frac{u}{v} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Dans le cas de la *fig.* 206, le rapport $\frac{OV}{OU}$ est égal à l'unité et l'on a encore

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AU}{BV} = \frac{u}{v} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

320. Pour déterminer les points C, D, où les droites BS, AS rencontrent respectivement les axes AU, BV, il faut faire successivement, dans (1), $v = 0$, $u = 0$; on a (*fig.* 205)

$$u = \frac{AC}{CO} = \frac{\nu}{\lambda}, \quad v = \frac{BD}{DO} = \frac{\nu}{\mu}$$

et (*fig.* 206)

$$u = AC = \frac{\nu}{\lambda}, \quad v = BD = \frac{\nu}{\mu}.$$

Les mêmes relations servent à déterminer la position du point S lorsqu'il est sur l'un des deux axes.

321. La distance PS (*fig.* 206) du point S à la base est donnée par la relation

$$(5) \qquad \frac{PS - u}{v - PS} = \frac{AP}{PB} = \frac{\mu}{\lambda},$$

d'où

$$PS = \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu} = \frac{\nu}{\mu + \lambda}.$$

322. A tout système de valeurs des coordonnées tangentielles u et v correspond une droite et une seule. Si l'on donne, entre u et v, une relation, $f(u, v) = 0$, et si l'on fait varier l'une de ces coordonnées d'une manière continue, l'autre variant aussi d'une manière continue, la droite se déplace dans le plan et *enveloppe* une courbe dont l'équation, dans le système considéré, est

$$f(u, v) = 0.$$

Si l'équation est algébrique et du degré m, la courbe qu'elle représente est de la $m^{\text{ième}}$ classe, c'est-à-dire qu'on peut lui mener m tangentes (réelles ou imaginaires) par un point quelconque du plan.

On détermine, en effet, les tangentes qui concourent au point représenté par l'équation (1) en remplaçant u par $\nu - \mu v$ dans la fonction proposée. On a ainsi la nouvelle équation

$$f(\nu - \mu v, v) = 0,$$

dont les racines sont les ordonnées des m tangentes cherchées. La courbe admet donc m tangentes passant par un même point.

323. Deux droites dont les coordonnées sont respectivement u_1 et v_1, u_2 et v_2, se coupent en un point dont l'équation est

$$\frac{v - v_1}{u - u_1} = \frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}.$$

324. Si une droite, dont les coordonnées sont u_1, v_1, est tangente à la courbe $f(u, v) = 0$, l'équation du point de contact sera

$$\frac{v - v_1}{u - u_1} = \frac{dv_1}{du_1} \quad \text{ou} \quad (u - u_1)\frac{df}{du_1} + (v - v_1)\frac{df}{dv_1} = 0.$$

325. Soit $f(u, v)$ l'équation d'une courbe de la classe m et soient α, β les coordonnées d'une droite. Si deux tangentes infiniment voisines ont respectivement pour coordonnées u, v et $u + h$, $v + k$, on a

$$(1) \qquad f(u, v) = 0,$$

$$(2) \qquad f(u + h, v + k) = 0.$$

En se bornant aux infiniment petits du premier ordre, on a

$$f(u + h, v + k) = f(u, v) + hf'_u(u, v) + kf'_v(u, v);$$

soit, à cause de (1) et (2),

$$hf'_u + kf'_v = 0. \tag{3}$$

Les deux tangentes infiniment voisines se coupant sur la droite (α, β) on a

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta} = \frac{h}{k};$$

substituant dans (3), il vient

$$(u-\alpha)f'_u + (v-\beta)f'_v = 0.$$

Les équations (1) et (4), prises simultanément, déterminent les tangentes (u, v) à la courbe donnée, aux points où elle rencontre la droite (α, β).

326. Les propriétés précédentes, établies pour les systèmes plans, s'étendent aussi aux espaces. Ainsi [1] :

Si l'on prend sur les arêtes d'un angle trièdre trois points tels que les valeurs inverses de leurs distances au sommet de l'angle aient entre elles une relation constante de degré m, le plan mobile déterminé par ces trois points enveloppe une surface géométrique à laquelle on peut mener m plans tangents par une même droite.

Si la relation est du premier degré, le plan mobile passe constamment par un point fixe.

Et réciproquement :

Tout plan tangent à une surface géométrique, rapportée à trois axes concourants quelconques, rencontre les axes en trois points, tels que les valeurs inverses des distances de ces points à l'origine ont entre elles une relation constante, d'un degré égal au nombre de plans tangents qu'on peut mener à la surface par une même droite.

La relation est du premier degré lorsque la surface se réduit à un point.

De même en coordonnées parallèles :

Si, à partir de trois points fixes, pris respectivement sur trois axes pa-

---

(1) CHASLES, *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science : la dualité et l'homographie*, faisant suite à l'*Aperçu historique*, etc., 2e édit., p. 631. Paris, 1875.

rallèles, non situés dans un même plan, on porte trois segments de longueurs variables ayant entre eux une relation constante de degré m, le plan mobile déterminé par les extrémités de ces segments enveloppe une surface géométrique à laquelle on peut mener m plans tangents par une même droite. Le plan mobile passe constamment par un point fixe lorsque la relation est du premier degré.

Et réciproquement.

Note II. — Résolution des équations numériques. Méthode de M. Maurice d'Ocagne.

327. On a vu (174, 175) que l'équation

$$x^n + px + q = 0, \tag{1}$$

en coordonnées cartésiennes, représente un conoïde dont les génératrices sont projetées orthogonalement sur le plan directeur pq, suivant les droites définies par les équations linéaires qu'on obtient en attribuant des valeurs successives au paramètre variable x; que l'enveloppe de ces droites est une courbe, dite *solutive* [1], de l'ordre et de la classe déterminés par le degré de l'équation proposée; que, dès lors, si l'on assigne comme cote à chaque droite du Tableau la valeur correspondante de x, on obtient les racines réelles de toute équation particulière, $x^n + p_1 x + q_1 = 0$, dans laquelle p_1, q_1 sont des coefficients numériques, en lisant les cotes des droites tangentes qui concourent au point $p_1 q_1$.

On conçoit *a priori* que, en vertu de la loi de dualité, l'usage des coordonnées tangentielles doit conduire à une solution corrélative, dans laquelle les ponctuelles, déterminées par les équations des droites cotées qui les contiennent, seront remplacées par des faisceaux de rayons, déterminés par les équations de leurs centres. A la suite continue de droites enveloppant la courbe solutive du premier système correspondra, dans le second,

---

[1] Cette courbe est la projection orthogonale sur le plan pq de la *ligne de striction*, lieu des points centraux des génératrices du conoïde. Le point central d'une génératrice est le centre de la ponctuelle involutoire (G. 197) formée par les points de contact des couples de plans tangents rectangulaires (G. 199) qui contiennent cette génératrice. Le point central, conjugué du point à l'infini de l'involution, est le point de contact du plan tangent perpendiculaire au plan asymptotique de la génératrice, c'est-à-dire du plan tangent perpendiculaire au plan directeur du conoïde (De la Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*, 2e partie, Paris, 1880, p. 148 et 154. — Fiedler, *Die darstellende Geometrie*. Leipzig, 1871, nos 93, 107-108).

une suite continue de centres formant une courbe solutive; et, de même que chaque ponctuelle a un point commun avec la première courbe, chaque faisceau aura un rayon tangent à la seconde. Enfin, les valeurs des racines d'une équation proposée seront déterminées, non plus par des droites dont on connaît un point et la courbe enveloppe, mais par des faisceaux dont on connaît un rayon, en même temps que la courbe lieu de leurs centres. L'avantage du nouveau tracé consistera donc à lire les cotes des points d'intersection d'une courbe et d'une droite donnée, au lieu de lire les cotes des droites tangentes à une courbe et passant par un point donné (1).

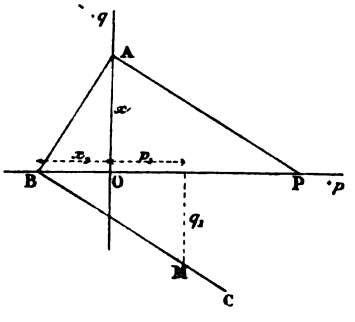
328. A la méthode de M. Lalanne, pour la résolution des équations numériques de tous les degrés, correspond, d'après les considérations qui précèdent, une méthode corrélative proposée par M. d'Ocagne (2).

Soient u, v, w des distances variables, portées sur trois axes parallèles, à partir de trois points fixes respectivement pris sur ces axes. Les systèmes

---

(1) Il convient de remarquer, toutefois, que, dans la méthode si simple proposée par M. Lalanne, les droites du Tableau peuvent être construites d'après leurs équations respectives, indépendamment de la solutive qui les enveloppe, et en évitant, par conséquent, la difficulté graphique qui consiste à mener, par un point donné, une droite tangente à une courbe donnée. Dans le cas de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, dont l'abaque est représenté par la *fig.* 115, les droites cotées peuvent être facilement construites de la manière suivante (37) : On prend (*fig.* 207) OP $= 1$, OA $= x$, on mène AB perpendiculaire sur AP, BC perpendiculaire sur AB. La droite BC représente l'équation proposée lorsqu'on assigne à p et à q les valeurs particulières p_1, q_1, qui déterminent l'un quelconque M de ses points. On a, en effet (J. Massau, *Mémoire sur l'intégration graphique*, etc., liv. III, p. 19),

Fig. 207.



$$BO = x^2 \quad \text{et} \quad \frac{-q_1}{x^2 + p_1} = x,$$

d'où

$$x^3 + p_1 x + q_1 = 0.$$

(2) Maurice d'Ocagne, *Procédé nouveau de Calcul graphique*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, Paris, 1884, 2e sem., p. 531-540. Voir aussi, du même auteur : *Étude de deux systèmes de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Paris, 1884, p. 410 et suiv. Ces deux Études ont été réunies dans un Mémoire tiré à part. (Paris, Gauthier-Villars, 1885).

de valeurs des variables satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad w^n + uw + v = 0$$

sont (326) les coordonnées parallèles d'un plan mobile qui enveloppe la surface de la classe n représentée par cette équation. Lorsque l'équation est du premier degré, la surface se réduit à un point et tous les plans tangents appartiennent à une même gerbe (G. 6) dont ce point est le centre.

329. Si l'on assigne à w une valeur particulière $\frac{\lambda}{\mu}$, l'équation (1) devient

$$\lambda u + \mu v = -\frac{\lambda^n}{\mu^{n-1}}.$$

Cette relation du premier degré, entre les variables u et v, peut être considérée (315) comme l'équation d'un point S situé sur le plan des axes u et v. On construit ce point (*fig.* 206) comme intersection de deux quelconques des trois droites AD, BC, PS. On obtient les droites AD, BC en joignant l'origine A au point D, déterminé (320) par la relation $BD = \frac{v}{\mu} = -\frac{\lambda^n}{\mu^n}$, et l'origine B au point C, déterminé pareillement par la relation $AC = \frac{v}{\lambda} = -\frac{\lambda^{n-1}}{\mu^{n-1}}$. On obtient PS en menant une parallèle aux axes par le point P qui divise AB (318) dans le rapport

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

On peut aussi (321) déterminer le point S en portant dans la direction de PS, à partir du point P, la longueur

$$PS = \frac{v}{\mu + \lambda} = -\frac{\lambda^n}{\mu^{n-1}} \frac{1}{\mu + \lambda}.$$

330. En attribuant à $\frac{\lambda}{\mu}$ des valeurs successives, on obtient, pour chacune d'elles, un point S, qui est situé entre les axes u et v si l'on a eu soin de ne prendre que des valeurs *positives* (318). A côté de chaque point S, on inscrit sur l'épure la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ qui l'a déterminé et l'on raccorde la suite des points cotés par une courbe continue qui est la *solutive* du nouvel abaque.

L'élimination de w entre l'équation proposée et sa dérivée par rapport à w donne l'équation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées u et v de chacune des tangentes à la solutive.

Quand on fait BD ou $-\frac{\lambda^n}{\mu^n} = 0$, le rapport $\frac{PA}{PB} = -\frac{\mu}{\lambda}$ devient infini, le point S se confond avec le point B et les coordonnées u, v de la tangente en S sont nulles. La courbe est donc tangente à la base AB au point B.

Si l'on fait $BD = \infty$, on a en même temps $AD = \infty$ et $\frac{PA}{PB} = 0$. Le point P vient en A, le point S est le point à l'infini de la direction des axes, et la courbe est asymptote à l'axe des u.

Dans le passage de la position BA à la position AC, la tangente s'est déplacée d'une manière continue, ses coordonnées u et v croissant graduellement, la première de 0 à $-\infty$, la seconde de 0 à $+\infty$; en sorte que la courbe enveloppe, dans la partie comprise entre les axes, s'infléchit d'une manière continue, sans points de rebroussement ni points d'inflexion.

La parallèle aux axes menée par le point milieu de AB, pour lequel le rapport $\frac{\mu}{\lambda} = 1$, coupe la courbe à la distance $PS = -\frac{1}{2}$ de la base, ainsi qu'on le vérifie en faisant $\lambda = \mu$ dans l'expression donnée plus haut de PS.

331. Assignons à u et à v, dans l'équation (1), les valeurs numériques u_1, v_1. La droite dont ces valeurs sont les coordonnées rencontre la courbe en des points dont les cotes sont des racines *positives* (330) de l'équation proposée.

Pour avoir les racines négatives, il faut remplacer w par $-w$ dans l'équation, ce qui revient à changer le signe de u_1, quand n est pair, et le signe de v_1, quand n est impair. Les racines sont alors les cotes des points de rencontre de la solutive avec la droite $(-u_1, v_1)$ dans le premier cas, avec la droite $(u_1, -v_1)$ dans le second.

332. Les points de rencontre étant ordinairement situés entre deux points cotés, on évalue les racines, d'après les cotes de ces derniers points, par une simple interpolation à vue. On peut aussi lire les racines sur l'échelle graduée de l'un des axes, de celui des v par exemple. Il suffit pour cela de mener la droite qui a pour abscisse $u = +1$ et qui passe par le point P, projection sur la base AB du point de rencontre relatif à une racine. L'ordonnée v de cette droite est la racine cherchée, car on a (318)

$$\frac{v}{1} = \frac{PB}{PA} = -\frac{\lambda}{\mu} = w.$$

Lorsque l'équation proposée est du second degré, il suffit de mener BS

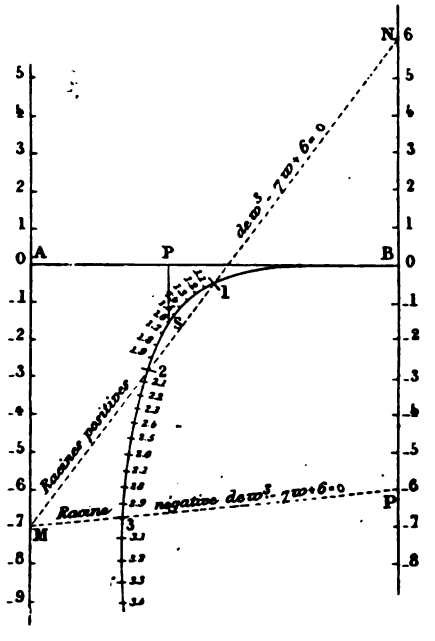
qui coupe l'axe des u en C; on a immédiatement (329)

$$AC = -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

On peut éviter les constructions effectives sur le tableau en traçant une droite indéfinie sur un transparent mobile. Quand on place cette droite dans la position déterminée par les coordonnées particulières u_1, v_1, elle coupe la solutive en des points dont les cotes sont les racines de l'équation numérique.

333. La *fig.* 208 représente la solutive pour l'équation du troisième

Fig. 208.



degré $w^3 + uw + v = 0$. Si l'on fait $u = -7$, $v = +6$, les racines positives $w = 1$, $w = 2$ de l'équation sont données par la droite MN qui joint la division -7 des u à la division $+6$ des v. La racine négative $w = -3$ est donnée par la droite MP qui joint la division -7 des u à la division -6 des v (331).

334. Si l'on prend la base AB comme axe des x, l'axe des u comme

axe des y, on a

$$AP = x, \quad PB = l - x, \quad PS = y,$$

et par suite (329)

$$\frac{l-x}{x} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad y = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\,\frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

L'équation de la solutive en coordonnées cartésiennes est donc, après réductions,

$$y = \frac{-x^3 + 3lx^2 - 3l^2x + l^3}{lx^2}$$

On pourra obtenir cette courbe en construisant d'abord (303, 305) la parabole $y = -\frac{x^3}{l} + 3x^2 - 3lx + l^2$, et en appliquant ensuite la méthode de transformation du n° 306.

Les mêmes constructions s'étendent au cas général où, l'équation proposée étant du degré n en ω, l'équation transformée est du même degré en x.

335. Si l'équation tangentielle proposée est du second degré en ω, l'équation cartésienne de la solution devient

$$y = \frac{-x^2 + 2lx + l^2}{lx}.$$

C'est la forme de l'équation d'une hyperbole du second ordre asymptote à l'axe des y.

336. Dans l'équation du second degré $\omega^2 + u_1\omega + v_1 = 0$, le coefficient u_1 (au signe près) et le coefficient v_1 sont respectivement égaux à la somme et au produit des racines. Dès lors, la droite qui passe par les points de la solutive cotés α, α' coupe l'axe des u à la division $\alpha + \alpha'$, l'axe des v à la division $\alpha\alpha'$, et la solutive permet d'opérer l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux nombres donnés.

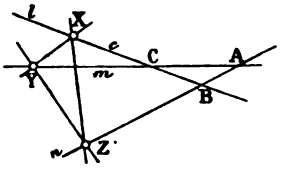
Si le point coté α' vient se confondre avec le point coté α, la tangente à la solutive en ce dernier point coupe la partie positive de l'axe des v à la division marquée α^2. La solutive permet donc d'élever un nombre au carré. Le tracé de la tangente est facilité par cette considération qu'elle coupe l'axe des u à la division -2α.

L'extraction de la racine carrée est l'opération inverse de la précédente : on peut l'effectuer en résolvant l'équation $\omega^2 - b = 0$, c'est-à-dire en traçant la droite qui passe par l'origine A de l'axe des u et par la division $-b$ de l'axe des v.

Note III. — Rectification graphique des lignes de bornage.

337. Soient X, Y, Z (*fig.* 209) trois points pris arbitrairement sur les côtés l, m, n d'un triangle ABC. Nous aurons, en tenant compte des conventions relatives aux signes des aires (80),

Fig. 209.



$$ABC + AYZ = BCYZ,$$
$$BCYZ + BZX = YZXC,$$
$$YZXC + CXY = XYZ$$

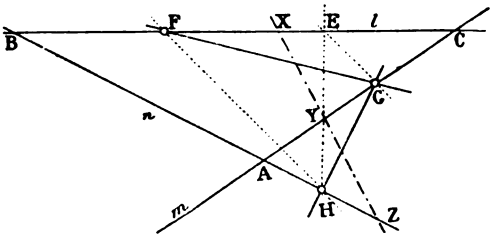
et, par suite,

$$XYZ = ABC + AYZ + BZX + CXY.$$

Lorsque le second terme de cette égalité est nul, l'aire du triangle XYZ est égale à zéro et les points X, Y, Z sont en ligne droite.

338. Prenons à volonté, respectivement sur les droites l, m, n (*fig.* 210),

Fig. 210.



les points F, G, H et, par l'un quelconque G de ces points, menons à la droite qui joint les deux autres la parallèle GE qui coupe l en E.

Nous aurons (337)

$$FGH = ABC + AGH + BHF + CFG,$$

soit, en remarquant que

$$FGH = FEH = -FHE \quad \text{et} \quad BHF + FHE = BHE,$$

(1) $$ABC + AGH + BHE + CFG = 0.$$

Prenons sur les droites l, m, n les points X, Y, Z, tels que

(2) $$AYZ = AGH, \quad BZX = BHE, \quad CXY = CFG;$$

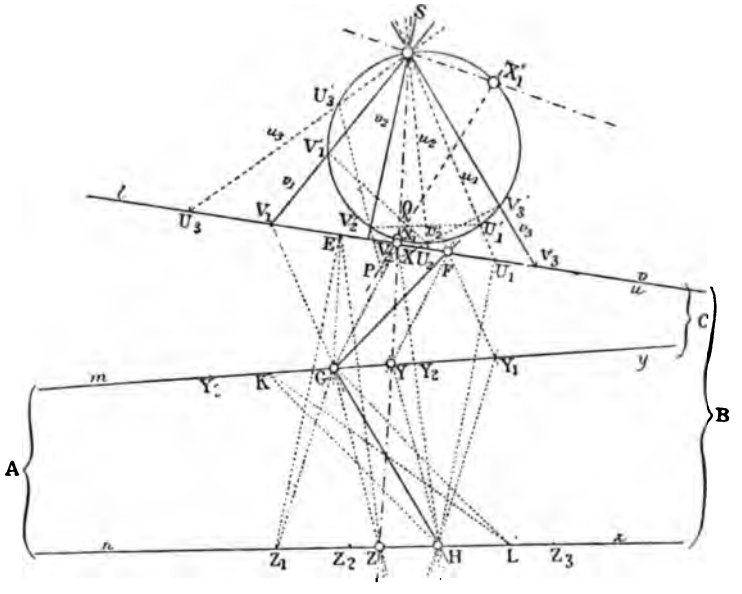
nous aurons, en substituant dans (1),

$$ABC + AYZ + BZX + CXY = 0;$$

d'où il suit (337) que les points X, Y, Z, satisfaisant aux relations (2), sont en ligne droite.

339. *Sur trois lignes de bornage non concourantes, l, m, n (fig. 211)*

Fig. 211.



sont respectivement trois bornes F, G, H; *deux parcelles, comprises entre l et m, sont séparées par la ligne* FG; *deux autres parcelles, comprises entre m et n, sont séparées par la ligne* GH. *On propose de substituer à la ligne brisée* FGH *une ligne droite* XYZ, *telle que les points* X, Y, Z *soient respectivement sur les droites l, m, n et que les contenances des quatre parcelles ne soient pas changées.*

On détermine le point d'intersection E de la droite l et de la parallèle menée par le point G à FH. On prend comme éléments d'une ponctuelle v, située sur l, une suite quelconque de points V_1, V_2, V_3, ... On mène par le point F une suite de rayons, respectivement parallèles à GV_1, GV_2, GV_3, ..., qui déterminent sur m autant d'éléments Y_1, Y_2, Y_3, ... d'une ponctuelle y. On mène, par le point G, des rayons respectivement paral-

lèles à ceux qui projettent la ponctuelle y du point H et l'on obtient ainsi sur n les éléments $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ d'une ponctuelle z. Enfin, on mène par le point H des rayons parallèles à ceux qui projettent la ponctuelle z du point E, et l'on obtient sur l la ponctuelle $U_1, U_2, U_3, \ldots$.

Les ponctuelles v et y, sections des faisceaux perspectifs de rayons G et F (G. 58), sont projectives entre elles (G. 47); de même les ponctuelles y et z, sections des faisceaux perspectifs H et G; de même les ponctuelles z et u, sections des faisceaux perspectifs E et U. Les ponctuelles superposées v et u sont donc projectives (G. 41). Pour déterminer leurs points unis, on décrit (G. 211) dans le plan de la figure une circonférence passant par un point S à partir duquel on projette sur la courbe : d'une part, en V'_1, V'_2, V'_3 trois points quelconques V_1, V_2, V_3 de v; d'autre part, en U'_1, U'_2, U'_3, les trois points correspondants de u.

Les droites $V'_2U'_3$, $U'_2V'_3$ se coupent en P, les droites $V'_1U'_2$, $U'_1V'_2$ en Q, et la droite PQ coupe la circonférence en deux points X_1, X'_1, dont les projections, faites du centre S sur la droite l, sont les points unis des ponctuelles v et u. Considérons l'un de ces points X. Le rayon mené de F, parallèlement à GX, coupe m au point Y, correspondant de X sur la ponctuelle y; le rayon mené de G, parallèlement à HY, coupe n au point Z, correspondant de Y et de X sur la ponctuelle z; et l'on peut vérifier que le rayon mené de H, parallèlement à EZ, coupe l au point X déjà déterminé, ce qui doit être, puisque X est un élément uni des ponctuelles u et v.

Les droites HY, EZ, GX étant, d'après la construction, respectivement parallèles aux droites GZ, HX, FY, on a

$$AYZ = AGH, \quad BZX = BHE, \quad CXY = CFG.$$

Ce sont précisément les relations (2) du n° 338, desquelles nous avons déjà conclu que les points X, Y, Z sont en ligne droite. Elles satisfont d'ailleurs à la condition posée de ne pas changer la contenance des parcelles.

A chacun des deux points unis des ponctuelles u et v correspond une solution théorique du problème; mais on distingue à première vue celle des deux solutions qui satisfait aux données pratiques [1].

340. Si la ligne brisée du bornage primitif, au lieu d'avoir un seul sommet G sur m, empruntait un segment à cette droite et se dirigeait, par exemple, suivant FGKL, on déterminerait le point H d'intersection de n et de la parallèle menée à GL par le point K et l'on pourrait, sans changer

---

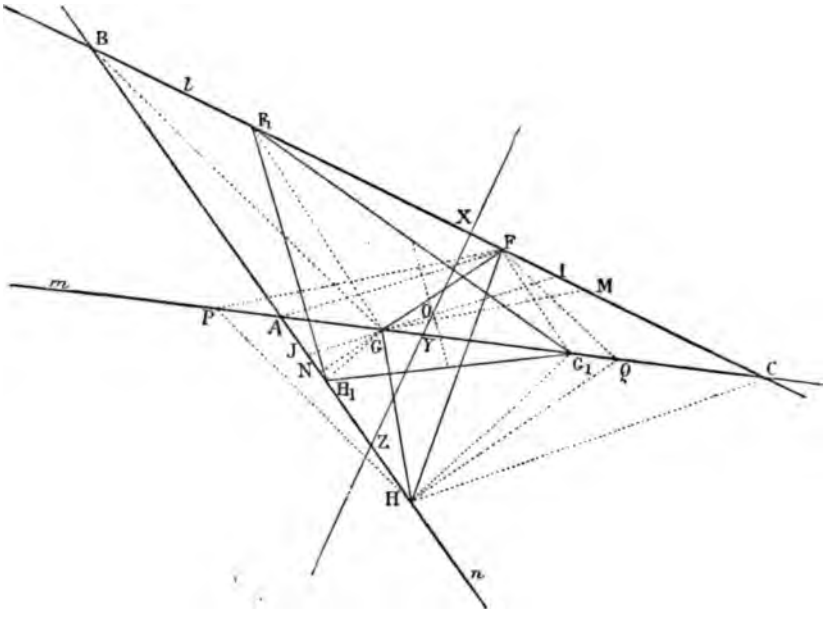
[1] *Auslösung einer Grenzausgleichungsaufgabe vermittelst neuerer Geometrie*, von C.-W. Baur (*Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1874, p. 29-44).

la contenance des parcelles comprises entre m et n, remplacer KL par GH. On serait ainsi ramené au cas précédent.

341. On peut aussi envisager de la manière suivante le problème du n° 339.

La condition d'équivalence des deux parcelles comprises entre les droites l, m (*fig.* 212) est satisfaite par toutes les droites GF, G_1F_1, ... qui font avec l et m des triangles équivalents, c'est-à-dire (G. 140) par toutes les tangentes à l'hyperbole qui a pour asymptotes les droites l et m. Pareillement, la condition d'équivalence des parcelles comprises entre les droites m, n est satisfaite par toutes les tangentes GH, G_1H_1, ... à l'hyperbole

Fig. 212.



qui a pour asymptotes m et n. La solution du problème est donc fournie par la tangente XYZ commune aux deux hyperboles.

La droite m, asymptote commune et lieu des points d'intersection des couples de tangentes correspondantes GF, GH, est un axe de collinéation (G. 246) des systèmes plans auxquels les deux courbes appartiennent. Les couples de points correspondants de ces courbes, c'est-à-dire (G. 136) les points de contact qui divisent en deux parties égales les couples de segments GF, GH, sont alignés sur un centre O de collinéation. Par ce

centre passe notamment la droite XZ, qui joint les points de contact des deux tangentes correspondantes superposées YX, YZ.

Les ponctuelles $l(F, X, F_1, \ldots)$, $n(H, Z, H_1, \ldots)$, projectives à la ponctuelle $m(G, Y, G_1, \ldots)$, sont projectives entre elles. Les troisièmes côtés FH des triangles FGH constituent donc (G. 62) un faisceau de rayons du second ordre. La courbe enveloppe de ce faisceau est une troisième hyperbole, car (G. 99) les points de contact M, N, situés sur les deux ponctuelles génératrices, c'est-à-dire (G. 64) les éléments qui correspondent au point d'intersection B des lieux de ces ponctuelles, sont, dans les conditions de la figure, en dehors des segments BI, BJ, compris entre le point B et les points I, J des ponctuelles qui correspondent mutuellement aux points à l'infini de leurs directions.

On voit d'ailleurs que FH coïncide avec AC lorsque G est le point à l'infini de *m* et avec XZ lorsque G vient en Y. A mesure que, dans son mouvement continu, le rayon FH s'approche de l'une ou de l'autre de ces positions, son intersection avec *m* dans le premier cas, avec XY dans le second, s'éloigne toujours davantage vers les points à l'infini de ces droites. Les rayons *m* et XZ du faisceau du second ordre sont coupés, respectivement, par les rayons infiniment voisins, en des points infiniment voisins de leurs points à l'infini. En d'autres termes, *m* et XZ sont les asymptotes de la troisième hyperbole.

FIN DU CALCUL GRAPHIQUE.

3989 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

ABRAHAM (**Henri**) et **LANGEVIN** (**Paul**). — **Les Quantités élémentaires d'électricité : ions, électrons, corpuscules.** Un volume en deux fascicules in-8 (25-16) de XVI-1138 pages, avec nombreuses figures; 1905 (*Mémoires de la Société de Physique*, 2e Série)..... 35 fr.

APPELL (**Paul**), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 3 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément.

TOME I. — *Statique. Dynamique du point.* Volume de X-615 pages. 3e édition entièrement refondue, avec 178 figures; 1909..... 20 fr.

TOME II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique.* Volume de VIII-352 pages. 2e édition entièrement refondue; avec 99 figures; 1904..... 16 fr.

TOME III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* Volume de VII-645 pages. 2e édition entièrement refondue; avec 70 fig.; 1909. 20 fr.

DARBOUX (**G.**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant..... 60 fr.

Ire PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887. (Le Tome I ne se vend pas séparément).

IIe PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889..... 15 fr.

IIIe PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; 1894..... 15 fr.

IVe PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*; 1896..... 15 fr.

LÉVY (**Maurice**), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 4 vol. in-8 (25-16), avec 4 Atlas de même format. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère des Travaux publics.*)

Ire PARTIE. — *Principes et applications de la Statique graphique pure.* 3e édition. Volume de XXX-598 pages, avec 8 figures et un Atlas de 25 planches; 1907..... 22 fr.

IIe PARTIE. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* 2e édition. Volume de XIV-345 pages, avec figure et un Atlas de 6 planches; 1886..... 15 fr.

IIIe PARTIE. — *Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupole, corps de cloculation.* 2e édition. Volume de IX-418 pages avec figures et un Atlas de 6 planches; 1887..... 17 fr.

IVe PARTIE. — *Ouvrages de maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties.* 2e édition. Volume de IX-350 pages, avec fig. et un Atlas de 4 pl.; 1888.. 15 fr.

14190 — Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

OCT 2 5 1938